レジーム転換を考慮した価格調整過程の分析
補論

千葉 賢 *

要旨

本補論は，紙幅の都合により千葉 (2019) において割愛した内容を補足説明するものである。本補論の構成は以下の通りである。第 A 節では，レジーム転換を考慮した価格調整過程を階層型状態空間モデルに適用する際の計算手順について解説する。第 B 節では，第 A 節で解説したモデルを東京証券取引所上場銘柄に適用する際の注意点や推定結果について記述する。

A　階層型状態空間モデルでの推定手順

本論でも示されているように，本稿で提案されたモデルはパラメータがマルコフ連鎖にしたがって推移する階層型状態空間モデルとして定式化できる。したがって，Kim (1994) によって提案されたアルゴリズムを適用することで，ファンダメンタルズや状態確率の計算が可能となる。本節では，本稿で提案された価格調整モデルに Kim (1994) のアルゴリズムを適用する際の具体的な計算手順について解説する。

A.1　レジーム転換を考慮したカルマンフィルタ

通常のカルマンフィルタでは，1 期から t 期までの観測値集合 $y_{1:t} = (y_1, y_2, \ldots, y_t)$ を用いて潜在変数 x_t の濾波期待値 $x_{t|t} = E(x_t|y_{1:t})$，濾波分散 $P_{t|t} = E[(x_t - x_{t|t})^2|y_{1:t}]$ を逐次計算する。しかし，本稿で提案されたモデルは一部のパラメータがマルコフ連鎖にしたがって変化するため，$x_{t|t}$，$P_{t|t}$ は $y_{1:t}$ だけでなく状態 s_{t-1}，s_t の影響も受けて推移する。そのため，レジーム転換を考慮したカルマンフィルタでは，

$$x_{t|t}^{(ij)} = E(x_t|s_t = j, s_{t-1} = i, y_{1:t}), \qquad P_{t|t}^{(ij)} = E[(x_t - x_{t|t}^{(ij)})^2|s_t = j, s_{t-1} = i, y_{1:t}]$$

だけでなく，$\Pr(s_t = j, s_{t-1} = i|y_{1:t})$ も計算する必要がある。したがって，本モデルでは，

$$x_{t-1|t-1}^{(i)} = E\left(x_{t-1}|s_{t-1} = i, y_{1:t-1}\right), \qquad P_{t-1|t-1}^{(i)} = E[(x_{t-1} - x_{t-1|t-1}^{(i)})^2|s_{t-1} = i, y_{1:t}]$$

を所与として，以下のアルゴリズムを 1 期から最終期の T 期まで繰り返し実行する。

$$x_{t|t-1}^{(ij)} = x_{t-1|t-1}^{(i)}, \quad P_{t|t-1}^{(ij)} = P_{t-1|t-1}^{(i)} + [\omega(j)]^2, \quad \eta_{t|t-1}^{(ij)} = y_t - g_j x_{t|t-1}^{(ij)} - (1 - g_j) y_{t-1},$$
$$F_{t|t-1}^{(ij)} = g_j^2 P_{t|t-1}^{(ij)} + \sigma^2, \qquad K_t^{(ij)} = (g_j P_{t|t-1}^{(ij)})/F_{t|t-1}^{(ij)}, \tag{A.1}$$

* 福井工業大学環境情報学部経営情報学科, 〒910-8505 福井県福井市学園 3 丁目 6 番 1 号, TEL:0776-29-2752, E-mail:chiba-masaru@fukui-ut.ac.jp

$$L_t^{(ij)} = 1 - g_j K_{t|t-1}^{(ij)}, \qquad x_{t|t}^{(ij)} = x_{t|t-1}^{(ij)} + K_t^{(ij)} \eta_{t|t-1}^{(ij)}, \qquad P_{t|t}^{(ij)} = L_t^{(ij)} P_{t|t-1}^{(ij)}$$

ここで，$\omega(j) = \sum_{k=1}^{j} \omega_k$ である。なお，$\eta_{t|t-1}^{(ij)}$，$F_{t|t-1}^{(ij)}$ は，s_{t-1}，s_t，$y_{1:t-1}$ を元に計算される y_t の予測誤差，予測誤差分散をそれぞれ意味している。同様に，$t-1$ 期の濾波確率 $\Pr(s_{t-1} = i|y_{1:t-1})$ を所与として，以下のアルゴリズムを実行する [1)]。

$$\begin{aligned} \Pr(s_t = j, s_{t-1} = i|y_{1:t-1}) &= p_{ij} \Pr(s_{t-1} = i|y_{1:t-1}), \\ \Pr(s_t = j|y_{1:t-1}) &= \sum_{i=1}^{M} \Pr(s_t = j, s_{t-1} = i|y_{1:t-1}) \end{aligned} \tag{A.2}$$

ここで，$\Pr(s_t = j|y_{1:t-1})$ は t 期の予測確率，p_{ij} は推移確率行列 $\boldsymbol{P}$ の第 (j, i) 成分をそれぞれ意味している。このように，レジーム転換を考慮したカルマンフィルタでは，状態確率 $\Pr(s_t = j)$ に関するアルゴリズムも同時に実行する。さらに，t 期の条件付密度関数 $f(y_t|y_{1:t-1})$ は，以下の式より算出される。

$$f(y_t|y_{1:t-1}) = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} \Pr(s_t = j, s_{t-1} = i|y_{1:t-1}) f(y_t|s_t = j, s_{t-1} = i, y_{1:t-1}) \tag{A.3}$$

ここで，

$$f(y_t|s_t = j, s_{t-1} = i, y_{1:t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi F_{t|t-1}^{(ij)}}} \exp\left(-\frac{[\eta_{t|t-1}^{(ij)}]^2}{2F_{t|t-1}^{(ij)}} \right) \tag{A.4}$$

である。式 (A.3) が計算されると，ベイズの定理より，

$$\Pr(s_t = j, s_{t-1} = i|y_{1:t}) = \frac{\Pr(s_t = j, s_{t-1} = i|y_{t-1}) f(y_t|s_t = j, s_{t-1} = i, y_{1:t-1})}{f(y_t|y_{1:t-1})} \tag{A.5}$$

が計算できる。したがって，t 期の濾波確率は，

$$\Pr(s_t = j|y_{1:t}) = \sum_{i=1}^{M} \Pr(s_t = j, s_{t-1} = i|y_{1:t}) \tag{A.6}$$

となる。さらに，式 (A.1), (A.2), (A.5), (A.6) から，状態 j における t 期の濾波期待値 $x_{t|t}^{(j)}$，濾波分散 $P_{t|t}^{(j)}$ は，

$$\begin{aligned} x_{t|t}^{(j)} &= \sum_{i=1}^{M} \frac{\Pr(s_t = j, s_{t-1} = i|y_{1:t})}{\Pr(s_t = j|y_{1:t})} \cdot x_{t|t}^{(ij)}, \\ P_{t|t}^{(j)} &= \sum_{i=1}^{M} \frac{\Pr(s_t = j, s_{t-1} = i|y_{1:t})}{\Pr(s_t = j|y_{1:t})} \cdot [P_{t|t}^{(ij)} + (x_{t|t}^{(ij)} - x_{t|t}^{(j)})^2] \end{aligned} \tag{A.7}$$

となる。したがって，式 (A.6), (A.7) から，$x_{t|t}$，$P_{t|t}$ は以下のように与えられる.

$$x_{t|t} = \sum_{j=1}^{M} \Pr(s_t = j|y_{1:t}) x_{t|t}^{(j)}, \qquad P_{t|t} = \sum_{j=1}^{M} \Pr(s_t = j|y_{1:t}) [P_{t|t}^{(j)} + (x_{t|t}^{(j)} - x_{t|t})^2]$$

以上の手順を繰り返し実行すると，各期の条件付密度関数 $f(y_t|y_{1:t-1})$ が計算できるため，対数準尤度関数 $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})$ は以下の式より算出される。

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{t=1}^{T} \log f(y_t|y_{1:t-1}) \tag{A.8}$$

ここで，$\boldsymbol{\theta} = (p_{11}, \ldots, p_{1,M-1}, \ldots, p_{M1}, \ldots, p_{M,M-1}, g_1, \ldots, g_M, \sigma, \omega_1, \ldots, \omega_M)'$ は未知パラメータベクトルである。本稿では，非線形関数最適化アルゴリズム [2] を用いて対数準尤度関数 (A.8) を最大化し，(A.8) が最大となる $\boldsymbol{\theta}$ を最尤推定値 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ とする。なお，上記アルゴリズムにより計算された $x_{t|t-1}^{(ij)}$, $x_{t|t}^{(j)}$, $P_{t|t-1}^{(ij)}$, $P_{t|t}^{(j)}$, $\Pr(s_t = j|y_{1:t-1})$, $\Pr(s_t = j|y_{1:t})$ や最尤推定値 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ は，後述するカルマンスムーザと呼ばれるアルゴリズム実行時に使用するため，計算機内に保存する必要がある。

A.2　レジーム転換を考慮したカルマンスムーザ

通常のカルマンスムーザでは，1 期から T 期までの観測値集合 $y_{1:T}$ を元に，x_t の平滑化期待値 $x_{t|T} = E(x_t|y_{1:T})$ や平滑化分散 $P_{t|T} = E[(x_t - x_{t|T})^2|y_{1:T}]$ を逐次計算する。しかしながら，前節の議論と同様に，$x_{t|T}$, $P_{t|T}$ は $y_{1:T}$ だけでなく s_t, s_{t+1} の影響も受ける。そのため，レジーム転換を考慮したカルマンスムーザでは，

$$x_{t|T}^{(jk)} = E(x_t|s_{t+1} = k, s_t = j, y_{1:T}), \qquad P_{t|T}^{(jk)} = E[(x_t - x_{t|T}^{(jk)})^2|s_{t+1} = k, s_t = j, y_{1:T}]$$

だけでなく，$\Pr(s_{t+1} = k, s_t = j|y_{1:T})$ も計算する必要がある。そこで，本稿ではレジーム転換を考慮したカルマンフィルタによって計算された $x_{t|t}^{(j)}$, $x_{t+1|t}^{(jk)}$, $P_{t|t}^{(j)}$, $P_{t+1|t}^{(jk)}$ を元に，以下のアルゴリズムを $T-1$ 期から 1 期まで後向きに繰り返し実行する。

$$x_{t|T}^{(jk)} = x_{t|t}^{(jk)} + J_t^{(jk)}(x_{t+1|T}^{(k)} - x_{t+1|t}^{(jk)}), \qquad P_{t|T}^{(jk)} = P_{t|t}^{(j)} + [J_t^{(jk)}]^2(P_{t+1|T}^{(k)} - P_{t+1|t}^{(jk)}) \tag{A.9}$$

ここで，$J_t^{(jk)} = P_{t|t}^{(j)}/P_{t+1|t}^{(jk)}$ である。同時に，$\Pr(s_t = j|y_{1:t})$, $\Pr(s_{t+1} = k|y_{1:t})$, $\hat{p}_{jk}$ を用いて，以下のアルゴリズムを実行する。

$$\begin{aligned} \Pr(s_{t+1} = k, s_t = j|y_{1:T}) &= \frac{\Pr(s_{t+1} = k|y_{1:T}) \Pr(s_t = j|y_{1:t})\hat{p}_{jk}}{\Pr(s_{t+1} = k|y_{1:t})}, \\ \Pr(s_t = j|y_{1:T}) &= \sum_{k=1}^{M} \Pr(s_{t+1} = k, s_t = j|y_{1:T}) \end{aligned} \tag{A.10}$$

ここで，$\Pr(s_t = j|y_{1:T})$ は t 期の平滑化確率 [3] である。さらに，式 (A.9), (A.10) を用いると，状態 j における t 期の平滑化期待値 $x_{t|T}^{(j)}$, 平滑化分散 $P_{t|T}^{(j)}$ は，

$$\begin{aligned} x_{t|T}^{(j)} &= \sum_{k=1}^{M} \frac{\Pr(s_{t+1} = k, s_t = j|y_{1:T})}{\Pr(s_t = j|y_{1:T})} \cdot x_{t|T}^{(jk)}, \\ P_{t|T}^{(j)} &= \sum_{k=1}^{M} \frac{\Pr(s_{t+1} = k, s_t = j|y_{1:T})}{\Pr(s_t = j|y_{1:T})} \cdot [P_{t|t}^{(jk)} + (x_{t|T}^{(jk)} - x_{t|T}^{(j)})^2] \end{aligned} \tag{A.11}$$

と計算できる。したがって，式 (A.10), (A.11) より $x_{t|T}$，$P_{t|T}$ は以下のように与えられる。

$$x_{t|T} = \sum_{j=1}^{M} \Pr(s_t = j|y_{1:T}) x_{t|T}^{(j)}, \qquad P_{t|T} = \sum_{j=1}^{M} \Pr(s_t = j|y_{1:T}) [P_{t|T}^{(j)} + (x_{t|T}^{(j)} - x_{t|T})^2]$$

なお，$x_{t|T}$，$P_{t|T}$，$\Pr(s_t = j|y_{1:T})$ は，$x_{t|t}$，$P_{t|t}$，$\Pr(s_t = j|y_{1:t})$ より多くの観測値を用いて計算されるため，推定精度が高いことが知られている。そのため，本稿では平滑化アルゴリズムの計算結果を用いて分析を行うこととした。

A.3 数値解析的な安定性を確保するための対応策

A.3.1 アンダーフロー対策

第 A.1 節で説明したアルゴリズムを実際に実行すると，数値解析的に不安定な状況に陥り，最適化に失敗する場合がある。具体的には，$f(y_t|s_t = j, s_{t-1} = i, y_{1:t-1})$ のアンダーフローに伴う同時濾波確率 $\Pr(s_t = j, s_{t-1} = i|y_{1:t})$ や対数準尤度関数 $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})$ の発散が該当する [4]。そこで，本稿では以下のような変数変換を行うことで上記問題に対処している [5]。

最初に，式 (A.4) の最大値を以下のように定義する。

$$L_{t,\max} = \max_{i,j \in \{1,2,\ldots,M\}} \log f(y_t|s_t = j, s_{t-1} = i, y_{1:t-1}) \tag{A.12}$$

次に，式 (A.12) を用いて，式 (A.4) を以下のように変換する。

$$\tilde{f}(y_t|s_t = j, s_{t-1} = i, y_{1:t-1}) = \exp\left[\log f(y_t|s_t = j, s_{t-1} = i, y_{1:t-1}) - L_{t,\max}\right] \tag{A.13}$$

さらに，変数変換を施した条件付密度関数 $\tilde{f}(y_t|y_{1:t-1})$ を，以下の式より計算する。

$$\tilde{f}(y_t|y_{1:t-1}) = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} \Pr(s_t = j, s_{t-1} = i|y_{1:t-1}) \tilde{f}(y_t|s_t = j, s_{t-1} = i, y_{1:t-1}) \tag{A.14}$$

この時，$t-1$ 期及び t 期の同時濾波確率は以下のように算出できる。

$$\Pr(s_t = j, s_{t-1} = i|y_{1:t}) = \frac{\Pr(s_t = j, s_{t-1} = i|y_{t-1}) \tilde{f}(y_t|s_t = j, s_{t-1} = i, y_{1:t-1})}{\tilde{f}(y_t|y_{1:t-1})} \tag{A.15}$$

同様に，変数変換を施す前の条件付密度関数 $f(y_t|y_{1:t-1})$ は，以下の式より計算できる。

$$f(y_t|y_{1:t-1}) = \exp[\log \tilde{f}(y_t|y_{1:t-1}) + L_{t,\max}] \tag{A.16}$$

なお，式 (A.15), (A.16) によって計算された値は，それぞれ式 (A.5), (A.3) によって計算される値と同一となる。したがって，上記変換処理を第 A.1 節のアルゴリズムに追加することで，アンダーフローを回避して最適化を実行することが可能となる。

A.3.2　パラメータ空間に制約がある場合の最適化

第 A.1 節でも述べているように，本稿では非線形関数最適化アルゴリズムを用いて対数準尤度関数 (A.8) を最大化する。その際，非線形関数最適化アルゴリズムは (A.8) が最大となるようなパラメータ $\boldsymbol{\theta}$ を探索するが，実際には $\boldsymbol{\theta}$ を探索する空間 $\boldsymbol{\Theta}$ に制約が課せられている場合が多い。例えば，本稿で提案されたモデルでは，推移確率 p_{ij} に $0 < p_{ij} < 1$ という制約が課せられている。しかし，パラメータ空間 $\boldsymbol{\Theta}$ に直接制約を課して最適化を行うと，しばしば最適化に失敗したり，推定値が大域解に到達しないことが報告されている [6)]。

このような問題に対処するため，本稿ではパラメータ $\boldsymbol{\theta}$ とは別のパラメータ $\boldsymbol{\psi}$ を設定し，両者の間には以下のような関係が成立すると仮定する [7)]。

$$\boldsymbol{\theta} = g(\boldsymbol{\psi}) \tag{A.17}$$

ここで，$g(\cdot)$ は連続で微分可能な任意の関数であり，パラメータ $\boldsymbol{\psi}$ には一切制約が課せられていないものとする。この時，(A.8) は $\boldsymbol{\psi}$ の関数として以下のように表すことができる。

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{L}[g(\boldsymbol{\psi})] \tag{A.18}$$

後は，非線形関数最適化アルゴリズムを用いて (A.18) を計算し，(A.18) が最大となるような $\boldsymbol{\psi}$ を最尤推定値 $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ とすれば，一切制約を貸すことなく最適化が実行できる。なお，我々が本来必要としている $\boldsymbol{\theta}$ の最尤推定値 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ は，式 (A.17) に $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ を代入することで計算できる。また，$\hat{\boldsymbol{\theta}}$ の標準誤差 $SE(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ の計算に必要となる $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ の情報行列 $\mathscr{I}_{2D}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ は，以下の式より計算できる。

$$\mathscr{I}_{2D}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \left(\frac{\partial g(\boldsymbol{\psi})}{\partial \boldsymbol{\psi}}\bigg|_{\boldsymbol{\psi}=\hat{\boldsymbol{\psi}}} \right) \mathscr{I}_{2D}(\hat{\boldsymbol{\psi}}) \left(\frac{\partial g(\boldsymbol{\psi})}{\partial \boldsymbol{\psi}}\bigg|_{\boldsymbol{\psi}=\hat{\boldsymbol{\psi}}} \right)' \tag{A.19}$$

ここで，$\partial g(\boldsymbol{\psi})/\partial \boldsymbol{\psi}|_{\boldsymbol{\psi}=\hat{\boldsymbol{\psi}}}$ は，$\hat{\boldsymbol{\psi}}$ で評価された関数 $g(\boldsymbol{\psi})$ の一階の微係数，$\mathscr{I}_{2D}(\hat{\boldsymbol{\psi}})$ は (A.18) を最大化する際に計算される $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ の情報行列である。したがって，$SE(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ は (A.19) の対角成分の平方根を取ることで計算できる。なお，(A.19) を最大化する際の初期値 $\boldsymbol{\psi}^{(0)}$ は，以下の式より計算できる。

$$\boldsymbol{\psi}^{(0)} = g^{-1}(\boldsymbol{\theta}^{(0)}) \tag{A.20}$$

ここで，$g^{-1}(\cdot)$ は (A.17) で定義された関数 g の逆関数，$\boldsymbol{\theta}^{(0)}$ はパラメータ $\boldsymbol{\theta}$ の初期値である。上記手法により，$\boldsymbol{\Theta}$ に直接制約を課すことなく制約条件を満たした最尤推定値 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ の推定が可能となる。なお，上記手法はデルタ法と呼ばれる。

B　分析結果

B.1　分析の枠組みおよび注意点

本研究では，推定結果の頑健性を確認するため，下記 8 つのモデルを分析対象銘柄の対数収益率もしくは対数株価に適用する。本研究では，以下の順番で推定を行った。

1. レジーム転換を考慮しないモデル
   1.1. ARMA モデル
   1.2. 状態が 1 つの価格調整モデル (PAM_1)
2. レジーム転換を考慮したモデル
   2.1. 状態が 2 つのモデル
      2.1.1. 状態が 2 つのマルコフ転換モデル (MSM_2)
      2.1.2. 状態が 2 つの価格調整モデル (PAM_2)
   2.2. 状態が 3 つのモデル
      2.2.1. 状態が 3 つのマルコフ転換モデル (MSM_3)
      2.2.2. 状態が 3 つの価格調整モデル (PAM_3)
   2.3. 状態が 4 つのモデル
      2.3.1. 状態が 4 つのマルコフ転換モデル (MSM_4)
      2.3.2. 状態が 4 つの価格調整モデル (PAM_4)

なお，先に推定するモデルほど概して未知パラメータの数が少ないため，推定がより簡便なモデルとなっている。

上記モデルは，以下の設定に従い推定を行った。

(i) 未知パラメータの推定には，すべてのモデルに対し非線形関数最適化アルゴリズムによる最尤法を適用する。
(ii) すべてのモデルに対しデルタ法を適用する。また，レジーム転換を考慮したすべてのモデルに対しアンダーフロー対策を実施する。
(iii) 価格調整モデルにおける推移確率の初期値は，基本的に状態数の等しいマルコフ転換モデルにおける推移確率の初期値と同一の値を使用する。また，価格調整モデルにおける攪乱項 e_t のボラティリティ ω_j の初期値は，基本的に状態数の等しいマルコフ転換モデルにおける攪乱項 v_t のボラティリティ ϖ_j の初期値と同一の値を使用する。

なお，分析対象銘柄に適用する初期値は各モデル内では基本的に同一とした。しかし，レジーム転換を考慮した価格調整モデルを推定する際，幾つかの銘柄でエラーが発生したり，端点解に陥る事態が発生した。このような場合，以下の手順にしたがって対応した。

(i) 同一状態数のマルコフ転換モデルの推定値や MSC と比較して，問題が発生した価格調整モデルの推定値や MSC がどの程度乖離しているか確認する。
(ii) 比較した結果，明らかに端点解などで収束している可能性が疑われる場合，デルタ法によって変換される前のマルコフ転換モデルの最尤推定値 $\hat{\psi}$ を元に，価格調整モデルの初期値を修正する。
(iii) 修正された初期値を用いて，問題が発生した銘柄の未知パラメータの推定を実施する。

B.2　推定結果

本節では，各モデルにおいて設定した初期値やパラメータの変換方法，推定結果について記述する。なお，紙幅の都合上，状態数が 2, 3, 4 のマルコフ転換モデルに関しては記載を見送った [8]。

B.2.1　ARMA(1,1) モデル

最初に，分析対象銘柄の対数収益率を ARMA(1,1) モデルに適用する際に実施したパラメータ変換と初期値について説明する。ARMA(1,1) モデル (14) における未知パラメータは $\boldsymbol{\theta} = (c, \phi, \gamma, \varphi)'$ であるが，このパラメータには $-1 < \phi < 1$, $\varphi > 0$ という制約が課せられている。そこで，第 A.3.2 節で述べたように，パラメータ空間に制約のない別のパラメータ $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)'$ を設定し，両者の間に以下のような関係が成立すると仮定する。

$$c = \psi_1, \qquad \phi = \tanh(\psi_2) = \frac{\exp(\psi_2) - \exp(-\psi_2)}{\exp(\psi_2) + \exp(-\psi_2)}, \qquad \gamma = \psi_3, \qquad \varphi = \exp(\psi_4) \tag{B.1}$$

ここで，$\tanh(\cdot)$ は双曲線正接関数である。なお，(B.1) は (A.17) を具体的な関数で表したものである。また，本稿では未知パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ の初期値を $\boldsymbol{\theta}^{(0)} = (c^{(0)}, \phi^{(0)}, \gamma^{(0)}, \varphi^{(0)})' = (0, 0.5, -0.5, e^{-4})'$ と設定した。さらに，以下の式より計算される $\boldsymbol{\psi}$ の初期値 $\boldsymbol{\psi}^{(0)}$ を用いて対数準尤度関数の数値最大化を行った。

$$\psi_1^{(0)} = c^{(0)}, \qquad \psi_2^{(0)} = \frac{1}{2} \cdot \log\left(\frac{1 + \phi^{(0)}}{1 - \phi^{(0)}}\right), \qquad \psi_3^{(0)} = \gamma^{(0)}, \qquad \psi_4^{(0)} = \log \varphi^{(0)} \tag{B.2}$$

なお，式 (B.2) は式 (A.20) を具体的な関数で表したものである。また，調整係数推定値 $\hat{g}_A$ は，$\hat{g}_A = 1 - \hat{\phi}$ より計算できる。ここで，$\hat{\phi}$ はデルタ法を用いることで計算された ϕ の最尤推定値である。なお，$\hat{g}_A$ の標準誤差は $\hat{\phi}$ の標準誤差と同一となる。

上記初期値およびパラメータ変換のもと，分析対象銘柄の対数株式収益率を ARMA(1,1) モデルに適用することで得られた推定結果を表 B.1 に記載する。

表 B.1　ARMA(1,1) モデルの推定結果

階級	$\hat{c}$	$\hat{g}_A$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\varphi}$	$\hat{\lambda}$
クラス 1	0.03 (0.07)	0.80 (0.15)	-0.24 (0.14)	3.55 (0.06)	70.88 (27.10)
クラス 2	0.04 (0.06)	0.88 (0.13)	-0.15 (0.13)	2.87 (0.05)	79.48 (21.75)
クラス 3	0.05 (0.05)	0.87 (0.13)	-0.14 (0.13)	2.46 (0.04)	79.00 (21.84)
クラス 4	0.04 (0.05)	0.96 (0.14)	-0.04 (0.13)	2.37 (0.04)	82.53 (18.40)
クラス 5	0.04 (0.05)	0.98 (0.14)	-0.01 (0.14)	2.23 (0.03)	84.77 (14.48)
クラス 6	0.04 (0.05)	0.99 (0.13)	-0.01 (0.13)	2.29 (0.04)	83.41 (16.82)
クラス 7	0.05 (0.05)	1.01 (0.13)	0.01 (0.13)	2.26 (0.04)	85.91 (12.43)
クラス 8	0.04 (0.06)	1.01 (0.13)	0.01 (0.13)	2.23 (0.03)	83.06 (15.68)
クラス 9	0.05 (0.05)	0.99 (0.11)	-0.03 (0.11)	2.18 (0.03)	84.30 (12.92)
クラス 10	0.04 (0.05)	0.98 (0.10)	-0.05 (0.10)	2.16 (0.03)	82.24 (13.48)
全体	0.04 (0.05)	0.95 (0.13)	-0.06 (0.13)	2.46 (0.04)	81.56 (18.49)

(注 1) $\hat{g}_A$ は、個別銘柄の対数収益率を ARMA(1,1) モデルに適用した結果得られた調整係数推定値を階級ごとに算術平均したものである。また，イタリック体で記載されている $\hat{g}_A$ は, t 統計量 $\sqrt{N_c}[E(\hat{g}_A^c) - 1]/SE(\hat{g}_A^c)$ が，帰無仮説 $H_0 : g_A = 1$ を有意水準 5% (5 パーセンタイルは ± 1.96) で棄却されたことを意味する。ここで，N_c は階級 c に所属する銘柄数，$E(\hat{g}_A^c)$，$SE(\hat{g}_A^c)$ は階級 c における $\hat{g}_A$ の横断面平均値，標準偏差をそれぞれ意味する。なお，括弧内の数値は $\hat{g}_A$ の標準誤差を階級ごとに算術平均したものである。
(注 2) $\hat{c}$, $\hat{\rho}$, $\hat{\varphi}$ は，ARMA(1,1) モデルの定数項，攪乱項 ϵ_t の自己回帰係数，攪乱項 ϵ_t のボラティリティ推定値を階級ごとに算術平均したものである。また，括弧内の数値は $\hat{c}$, $\hat{\rho}$, $\hat{\varphi}$ の標準誤差を階級ごとに算術平均したものである。なお，$\hat{\varphi}$ の単位は % である。
(注 3) $\hat{\lambda}$ は情報効率性推定値を階級ごとに算術平均したものである。また，括弧内の数値は各階級における $\hat{\lambda}$ の横断面標準偏差である。なお，単位は % である。

B.2.2　状態が 1 つの価格調整モデル

次に，分析対象銘柄の対数株価を状態が 1 つの価格調整モデル (PAM_1) に適用する際に実施したパラメータ変換と初期値について説明する。PAM_1 における未知パラメータは $\boldsymbol{\theta} = (g, \sigma, \omega)'$ であるが，このパラメータには $0 < g < 2$, $\sigma > 0$, $\omega > 0$ という制約が課せられている。そこで，パラメータ空間に制約のない別のパラメータ $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)'$ を設定し，両者の間に以下のような関係が成立すると仮定する。

$$g = 1 + \tanh(\psi_1), \qquad \sigma = \exp(\psi_2), \qquad \omega = \exp(\psi_3)$$

また，未知パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ の初期値を $\boldsymbol{\theta}^{(0)} = (g^{(0)}, \sigma^{(0)}, \omega^{(0)})' = (1, e^{-6}, e^{-4})'$ と設定し，以下の式より計算される $\boldsymbol{\psi}$ の初期値 $\boldsymbol{\psi}^{(0)}$ を用いて対数準尤度関数の数値最大化を行った。

$$\psi_1^{(0)} = \frac{1}{2} \cdot \log\left(\frac{g^{(0)}}{2 - g^{(0)}}\right), \qquad \psi_2^{(0)} = \log \sigma^{(0)}, \qquad \psi_3^{(0)} = \log \omega^{(0)}$$

なお，PAM_1 を推定する際，本稿ではカルマンフィルタを用いて観測不可能な変数 (潜在変数) である対数ファンダメンタルズ $\log V_t$ $(\equiv x_t)$ の濾波期待値 $x_{t|t}$ や濾波分散 $P_{t|t}$ を計算する。しかし，PAM_1 は非定常過程であるため，潜在変数の濾波期待値や濾波分散の初期値 $x_{0|0}$，$P_{0|0}$ の設定には注意が必要となる [9)]。本稿では，以下の初期値を用いてカルマンフィルタの計算を行った。

$$x_{0|0} = \log P_1, \qquad P_{0|0} = 1$$

ここで，$\log P_1$ は，各銘柄の分析対象期間における最初の証券営業日の株価終値の対数値を意味している [10)]。したがって，濾波期待値の初期値は銘柄ごとに異なる。なお，ARIMA モデルなどにカルマンフィルタを適用する場合，潜在変数の濾波期待値の初期値に観測変数の初期値を適用することは，比較的一般的な方法とされている [11)]。一方，濾波分散の初期値はどの分析対象銘柄に対しても同一の値 (1) とした。カルマンフィルタに適用する時系列モデルが非定常過程である場合，濾波分散の初期値は比較的大きな値が望ましいとされているが [12)]，金融時系列データにおいて分散が 1 という値は比較的大きな値といえる [13)]。

表 B.2　状態が 1 つの価格調整モデルの推定結果

階級	$\hat{g}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\omega}$	$\hat{\lambda}$
クラス 1	*0.96* (0.03)	0.20 (0.01)	3.45 (0.10)	89.51 (16.24)
クラス 2	*0.94* (0.12)	0.23 (0.01)	2.78 (0.50)	87.28 (18.84)
クラス 3	*0.91* (0.03)	0.22 (0.02)	2.44 (0.08)	87.83 (18.34)
クラス 4	*0.94* (0.03)	0.16 (0.01)	2.37 (0.07)	90.36 (16.52)
クラス 5	*0.94* (0.03)	0.10 (0.01)	2.27 (0.07)	91.72 (14.02)
クラス 6	*0.92* (0.03)	0.14 (0.01)	2.32 (0.07)	89.98 (17.42)
クラス 7	*0.98* (0.03)	0.06 (0.00)	2.27 (0.07)	94.51 (12.56)
クラス 8	*0.97* (0.02)	0.10 (0.01)	2.23 (0.06)	93.63 (13.14)
クラス 9	1.00 (0.03)	0.07 (0.01)	2.15 (0.06)	95.34 (8.96)
クラス 10	0.99 (0.03)	0.09 (0.01)	2.13 (0.06)	94.34 (10.43)
全体	*0.96* (0.03)	0.14 (0.01)	2.44 (0.06)	91.45 (15.21)

(注 1) $\hat{g}$ は調整係数推定値を階級ごとに算術平均したものである。また，イタリック体で記載されている $\hat{g}$ は，t 統計量 $\sqrt{N_c}[E(\hat{g}^c) - 1]/SE(\hat{g}^c)$ が，帰無仮説 $H_0 : g = 1$ を有意水準 5% (5 パーセンタイルは ± 1.96) で棄却されたことを意味する。ここで，N_c は階級 c に所属する銘柄数，$E(\hat{g}^c)$，$SE(\hat{g}^c)$ は階級 c における $\hat{g}$ の横断面平均値，標準偏差をそれぞれ意味する。なお，括弧内の数値は $\hat{g}$ の標準誤差を階級ごとに算術平均したものである。
(注 2) $\hat{\sigma}$，$\hat{\omega}$ は攪乱項 u_t，e_t のボラティリティ推定値を階級ごとに算術平均したものである。また，括弧内の数値は $\hat{\sigma}$，$\hat{\omega}$ の標準誤差を階級ごとに算術平均したものである。なお，両者の単位はどちらも % である。
(注 3) $\hat{\lambda}$ は情報効率性推定値を階級ごとに算術平均したものである。また，括弧内の数値は各階級における $\hat{\lambda}$ の横断面標準偏差である。なお，単位は % である。

上記初期値およびパラメータ変換のもと，分析対象銘柄の対数株価を PAM_1 に適用することで得られた推定結果を表 B.2 に記載する。

B.2.3 状態が 2 つの価格調整モデル

次に，分析対象銘柄の対数株価を状態が 2 つの価格調整モデル (PAM_2) に適用する際に実施したパラメータ変換と初期値について説明する。PAM_2 における未知パラメータは $\boldsymbol{\theta} = (p_{11}, p_{21}, g_1, g_2, \sigma, \omega_1, \omega_2)'$ であるが，このパラメータには $0 < p_{11} < 1,\ 0 < p_{21} < 1,\ 0 < g_1 < 2,\ 0 < g_2 < 2,\ \sigma > 0,\ \omega_1 > 0,\ \omega_2 > 0$ という制約が課せられている。そこで，パラメータ空間に制約のない別のパラメータ $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_7)'$ を設定し，両者の間に以下のような関係が成立すると仮定する。

$$p_{11} = [1 + \exp(-\psi_1)]^{-1}, \quad p_{21} = [1 + \exp(-\psi_2)]^{-1}, \quad g_1 = 1 + \tanh(\psi_3), \quad g_2 = 1 + \tanh(\psi_4),$$
$$\sigma = \exp(\psi_5), \qquad \omega_1 = \exp(\psi_6), \qquad \omega_2 = \exp(\psi_7),$$

また，未知パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ の初期値を，

$$\boldsymbol{\theta}^{(0)} = (p_{11}^{(0)}, p_{21}^{(0)}, g_1^{(0)}, g_2^{(0)}, \sigma^{(0)}, \omega_1^{(0)}, \omega_2^{(0)})' = (0.9, 0.1, 1, 1, e^{-6}, e^{-5}, e^{-4})'$$

と設定し，以下の式より計算される $\boldsymbol{\psi}$ の初期値 $\boldsymbol{\psi}^{(0)}$ を用いて対数準尤度関数の数値最大化を行った。

$$\psi_1^{(0)} = \log\left(\frac{p_{11}^{(0)}}{1 - p_{11}^{(0)}}\right), \qquad \psi_2^{(0)} = \log\left(\frac{p_{21}^{(0)}}{1 - p_{21}^{(0)}}\right), \qquad \psi_3^{(0)} = \frac{1}{2} \cdot \log\left(\frac{g_1^{(0)}}{2 - g_1^{(0)}}\right),$$
$$\psi_4^{(0)} = \frac{1}{2} \cdot \log\left(\frac{g_2^{(0)}}{2 - g_2^{(0)}}\right), \qquad \psi_5^{(0)} = \log \sigma^{(0)}, \qquad \psi_6 = \log \omega_1^{(0)}, \qquad \psi_7 = \log \omega_2^{(0)}$$

なお，PAM_2 を推定する際，本稿ではレジーム転換を考慮したカルマンフィルタを用いて状態 i における潜在変数 $x_t^{(i)}$ の濾波期待値 $x_{t|t}^{(i)}$ や濾波分散 $P_{t|t}^{(i)}$，濾波確率 $\Pr(s_t = i | y_{1:t})$ を計算する。本稿では，以下の初期値を用いてレジーム転換を考慮したカルマンフィルタの計算を行った。

$$x_{0|0}^{(i)} = \log P_1, \qquad P_{0|0}^{(i)} = 1, \qquad \Pr(s_0 = i) = \pi_i \qquad \text{for } i = 1, 2$$

ここで，π_i は状態 i の定常確率である。上記初期値およびパラメータ変換のもと，分析対象銘柄の対数株価を PAM_2 に適用することで得られた推定結果を表 B.3, B.4 に記載する。

表 B.3　推移確率，平均持続期間，定常確率の推定結果 (PAM_2)

階級	$\hat{p}_{11}$	$\hat{p}_{12}$	$\hat{p}_{21}$	$\hat{p}_{22}$	$\hat{d}_1$	$\hat{d}_2$	$\hat{\pi}_1$	$\hat{\pi}_2$
クラス 1	92.15 (1.33)	7.85	23.01 (3.63)	76.99	15.63 (6.85)	5.28 (4.41)	73.93 (11.78)	26.07 (11.78)
クラス 2	92.72 (1.23)	7.28	22.18 (3.66)	77.82	16.09 (6.11)	5.38 (3.70)	74.42 (9.91)	25.58 (9.91)
クラス 3	93.79 (1.11)	6.21	20.12 (3.54)	79.88	19.37 (7.77)	6.25 (4.61)	75.30 (9.01)	24.70 (9.01)
クラス 4	94.30 (1.12)	5.70	19.65 (3.77)	80.35	20.09 (8.33)	6.28 (3.84)	75.78 (8.90)	24.22 (8.90)
クラス 5	93.96 (1.18)	6.04	17.35 (3.46)	82.65	19.60 (8.50)	7.21 (3.73)	72.48 (9.78)	27.52 (9.78)
クラス 6	94.34 (1.21)	5.66	16.14 (3.39)	83.86	21.46 (11.52)	7.76 (3.86)	72.27 (10.08)	27.73 (10.08)
クラス 7	94.92 (1.20)	5.08	14.44 (3.50)	85.56	24.30 (14.97)	9.15 (5.54)	72.02 (9.41)	27.98 (9.41)
クラス 8	95.46 (1.11)	4.54	13.50 (3.39)	86.50	26.89 (13.57)	10.02 (7.63)	73.14 (8.33)	26.86 (8.33)
クラス 9	96.33 (0.98)	3.67	11.74 (3.15)	88.26	35.10 (19.10)	12.12 (7.49)	74.20 (8.59)	25.80 (8.59)
クラス 10	97.10 (0.82)	2.90	9.11 (2.55)	90.89	46.92 (28.93)	16.05 (11.26)	74.11 (8.64)	25.89 (8.64)
全体	94.70 (1.12)	5.30	16.12 (3.38)	83.88	25.49 (17.58)	8.91 (7.08)	73.70 (9.42)	26.30 (9.42)

(注 1) $\hat{p}_{ij}$ は状態 i から状態 j への推移確率推定値を階級ごとに算術平均したものである。また，括弧内の数値は $\hat{p}_{ij}$ の標準誤差を階級ごとに算術平均したものである。なお，単位は % である。

(注 2) $\hat{p}_{12}$，$\hat{p}_{22}$ は，制約式 $\hat{p}_{12} = 1 - \hat{p}_{11}$，$\hat{p}_{22} = 1 - \hat{p}_{21}$ より計算された個別銘柄の推移確率の推定値を階級ごとに算術平均したものである。したがって，$\hat{p}_{12}$，$\hat{p}_{22}$ は直接推定していない。そのため，当該パラメータの標準誤差は記載していない。

(注 3) $\hat{d}_j$，$\hat{\pi}_j$ は状態 j 時の平均持続期間，定常確率推定値を階級ごとに算術平均したものである。また，括弧内の数値は各階級における $\hat{d}_j$，$\hat{\pi}_j$ の横断面標準偏差である。なお，両者の単位はそれぞれ取引日，% である。

表 B.4　調整係数，情報効率性，ボラティリティの推定結果 (PAM_2)

階級	$\hat{g}_1$	$\hat{g}_2$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\omega}_1$	$\hat{\omega}_2$	$\hat{\omega}(1)$	$\hat{\omega}(2)$
クラス 1	*0.95* (0.06)	1.01 (0.04)	83.33 (21.26)	92.15 (12.95)	85.42 (17.68)	0.32 (0.04)	1.62 (0.10)	4.67 (0.38)	1.62 (0.77)	6.29 (2.22)
クラス 2	*0.91* (0.08)	1.01 (0.04)	84.23 (17.66)	93.31 (9.30)	86.54 (14.25)	0.31 (0.06)	1.27 (0.07)	3.69 (0.29)	1.27 (0.69)	4.95 (2.02)
クラス 3	*0.95* (0.06)	1.00 (0.04)	86.66 (20.46)	94.04 (5.55)	88.84 (15.38)	0.17 (0.03)	1.29 (0.07)	3.28 (0.28)	1.29 (0.54)	4.57 (1.74)
クラス 4	*0.93* (0.06)	1.00 (0.04)	87.68 (20.24)	94.15 (5.86)	89.55 (15.23)	0.17 (0.03)	1.31 (0.07)	2.98 (0.28)	1.31 (0.56)	4.29 (1.73)
クラス 5	*0.94* (0.05)	*0.98* (0.04)	88.74 (19.34)	94.42 (8.02)	90.07 (15.28)	0.15 (0.02)	1.28 (0.07)	2.55 (0.24)	1.28 (0.65)	3.84 (1.44)
クラス 6	*0.93* (0.05)	0.99 (0.04)	88.32 (20.80)	94.47 (4.89)	90.24 (15.45)	0.13 (0.02)	1.34 (0.07)	2.55 (0.25)	1.34 (0.50)	3.89 (1.60)
クラス 7	0.98 (0.04)	1.00 (0.04)	93.16 (11.93)	95.84 (3.40)	94.07 (8.46)	0.08 (0.01)	1.45 (0.07)	2.28 (0.25)	1.45 (0.47)	3.72 (1.28)
クラス 8	*0.96* (0.04)	1.00 (0.04)	91.62 (17.13)	95.52 (3.68)	92.92 (12.01)	0.10 (0.01)	1.50 (0.08)	2.13 (0.25)	1.50 (0.47)	3.62 (1.14)
クラス 9	*0.97* (0.04)	*1.02* (0.04)	92.63 (15.12)	95.38 (3.61)	93.58 (10.84)	0.09 (0.01)	1.50 (0.07)	1.96 (0.25)	1.50 (0.39)	3.46 (1.19)
クラス 10	*0.96* (0.04)	*1.03* (0.04)	92.64 (14.40)	94.91 (3.89)	93.59 (9.86)	0.10 (0.01)	1.48 (0.07)	1.77 (0.21)	1.48 (0.36)	3.25 (0.86)
全体	*0.95* (0.05)	*1.00* (0.04)	89.39 (18.06)	94.58 (6.33)	90.91 (13.65)	0.15 (0.02)	1.40 (0.07)	2.65 (0.26)	1.40 (0.55)	4.05 (1.69)

(注 1) $\hat{g}_j$ は状態 j 時の調整係数推定値を階級ごとに算術平均したものである。また，イタリック体で記載されている $\hat{g}_j$ は，t 統計量 $\sqrt{N_c}[E(\hat{g}_j^c) - 1]/SE(\hat{g}_j^c)$ が，帰無仮説 $H_0 : g_j = 1$ を有意水準 5% (5 パーセンタイルは ± 1.96) で棄却されたことを意味する。ここで，N_c は階級 c に所属する銘柄数，$E(\hat{g}_j^c)$，$SE(\hat{g}_j^c)$ は階級 c における $\hat{g}_j$ の横断面平均値，標準偏差をそれぞれ意味する。なお，括弧内の数値は $\hat{g}_j$ の標準誤差を階級ごとに算術平均したものである。

(注 2) $\hat{\lambda}_j$ は状態 j 時の情報効率性推定値を階級ごとに算術平均したものである。一方，$\hat{\lambda}$ は定常効率性推定値を階級ごとに算術平均したものである。また，括弧内の数値は各階級における $\hat{\lambda}_j$，$\hat{\lambda}$ の横断面標準偏差である。なお，両者の単位はどちらも % である。

(注 3) $\hat{\sigma}$，$\hat{\omega}_j$ は攪乱項 u_t，e_t のボラティリティ推定値を階級ごとに算術平均したものである。また，括弧内の数値は $\hat{\sigma}$，$\hat{\omega}_j$ の標準誤差を階級ごとに算術平均したものである。なお，両者の単位はどちらも % である。

(注 4) $\hat{\omega}(j)$ は，計算式 $\hat{\omega}(j) = \sum_{k=1}^{j} \hat{\omega}_k$ によって得られた状態 j 時のファンダメンタル・ノイズ e_t のボラティリティ推定値を階級ごとに算術平均したものである。また，括弧内の数値は各階級における $\hat{\omega}(j)$ の横断面標準偏差である。なお，単位はどちらも % である。

B.2.4　状態が 3 つの価格調整モデル

次に，分析対象銘柄の対数株価を状態が 3 つの価格調整モデル (PAM_3) に適用する際に実施したパラメータ変換と初期値について説明する。PAM_3 における未知パラメータは，

$$\boldsymbol{\theta} = (p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}, p_{31}, p_{32}, g_1, g_2, g_3, \sigma, \omega_1, \omega_2, \omega_3)'$$

であるが，このパラメータには

$$0 < p_{i1} < 1, \qquad 0 < p_{i2} < 1, \qquad 0 < p_{i1} + p_{i2} < 1,$$

$$0 < g_i < 2, \qquad \sigma > 0, \qquad \omega_i > 0 \qquad \text{for } i = 1, 2, 3$$

という制約が課せられている。そこで，パラメータ空間に制約のない別のパラメータ $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{13})'$ を設定し，両者の間に以下のような関係が成立すると仮定する。

$$
\begin{aligned}
&p_{11} = \frac{\exp(\psi_1)}{1+\sum_{i=1}^{2}\exp(\psi_i)}, \quad p_{12} = \frac{\exp(\psi_2)}{1+\sum_{i=1}^{2}\exp(\psi_i)}, \quad p_{21} = \frac{\exp(\psi_3)}{1+\sum_{i=3}^{4}\exp(\psi_i)}, \\
&p_{22} = \frac{\exp(\psi_4)}{1+\sum_{i=3}^{4}\exp(\psi_i)}, \quad p_{31} = \frac{\exp(\psi_5)}{1+\sum_{i=5}^{6}\exp(\psi_i)}, \quad p_{32} = \frac{\exp(\psi_6)}{1+\sum_{i=5}^{6}\exp(\psi_i)}, \\
&g_i = 1+\tanh(\psi_{i+6}), \qquad \sigma = \exp(\psi_{10}), \qquad \omega_i = \exp(\psi_{i+10}) \qquad \text{for } i = 1,2,3
\end{aligned}
\tag{B.3}
$$

また，未知パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ の初期値を，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\theta}^{(0)} &= (p_{11}^{(0)}, p_{12}^{(0)}, p_{21}^{(0)}, p_{22}^{(0)}, p_{31}^{(0)}, p_{32}^{(0)}, g_1^{(0)}, g_2^{(0)}, g_3^{(0)}, \sigma^{(0)}, \omega_1^{(0)}, \omega_2^{(0)}, \omega_3^{(0)})' \\
&= (0.85, 0.1, 0.05, 0.85, 0.05, 0.1, 1, 1, 1, e^{-6}, e^{-5}, e^{-4}, e^{-3})'
\end{aligned}
$$

と設定し，以下の式より計算される $\boldsymbol{\psi}$ の初期値 $\boldsymbol{\psi}^{(0)}$ を用いて対数準尤度関数の数値最大化を行った。

$$
\psi_{i+6}^{(0)} = \frac{1}{2}\cdot\log\left(\frac{g_i^{(0)}}{2-g_i^{(0)}}\right), \qquad \psi_{10}^{(0)} = \log\sigma^{(0)}, \qquad \psi_{i+10}^{(0)} = \log\omega_i^{(0)} \qquad \text{for } i = 1,2,3
$$

なお，ψ_1 から ψ_6 の初期値は，式 (B.3) の逆関数を解析的に計算できないため，数値解析的に計算した値を用いた。例えば，ψ_1, ψ_2 の初期値は，-5 から 5 の範囲の数値を 0.1 刻みでそれぞれ 101 個生成し，

$$
p_{11}^{(0)} = \frac{\exp(\psi_1)}{1+\sum_{i=1}^{2}\exp(\psi_i)}, \qquad p_{12}^{(0)} = \frac{\exp(\psi_2)}{1+\sum_{i=1}^{2}\exp(\psi_i)}
$$

にもっとも近い ψ_1, ψ_2 の組み合わせを $\psi_1^{(0)}$, $\psi_2^{(0)}$ とした。

また，状態 i における濾波期待値，濾波分散，濾波確率の初期値は以下のように設定した。

$$
x_{0|0}^{(i)} = \log P_1, \qquad P_{0|0}^{(i)} = 1, \qquad \Pr(s_0 = i) = \pi_i \qquad \text{for } i = 1,2,3
$$

上記初期値およびパラメータ変換のもと，分析対象銘柄の対数株価を PAM_3 に適用することで得られた推定結果は，本論の第 4 節に記載されている。

B.2.5　状態が 4 つの価格調整モデル

最後に，分析対象銘柄の対数株価を状態が 4 つの価格調整モデル (PAM_4) に適用する際に実施したパラメータ変換と初期値について説明する。PAM_4 における未知パラメータは，

$$
\boldsymbol{\theta} = (p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{21}, p_{22}, p_{23}, p_{31}, p_{32}, p_{33}, p_{41}, p_{42}, p_{43}, g_1, g_2, g_3, g_4, \sigma, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)'
$$

であるが，このパラメータには

$$
\begin{aligned}
&0 < p_{i1} < 1, \qquad 0 < p_{i2} < 1, \qquad 0 < p_{i3} < 1, \qquad 0 < p_{i1}+p_{i2}+p_{i3} < 1, \\
&0 < g_i < 2, \qquad \sigma > 0, \qquad \omega_i > 0 \qquad \text{for } i = 1,2,3,4
\end{aligned}
$$

という制約が課せられている。そこで，パラメータ空間に制約のない別のパラメータ $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{21})'$ を設定し，両者の間に以下のような関係が成立すると仮定する。

$$
\begin{aligned}
p_{11} &= \frac{\exp(\psi_1)}{1+\sum_{i=1}^{3}\exp(\psi_i)}, \quad p_{12} = \frac{\exp(\psi_2)}{1+\sum_{i=1}^{3}\exp(\psi_i)}, \quad p_{13} = \frac{\exp(\psi_3)}{1+\sum_{i=1}^{3}\exp(\psi_i)}, \\
p_{21} &= \frac{\exp(\psi_4)}{1+\sum_{i=4}^{6}\exp(\psi_i)}, \quad p_{22} = \frac{\exp(\psi_5)}{1+\sum_{i=4}^{6}\exp(\psi_i)}, \quad p_{23} = \frac{\exp(\psi_6)}{1+\sum_{i=4}^{6}\exp(\psi_i)}, \\
p_{31} &= \frac{\exp(\psi_7)}{1+\sum_{i=7}^{9}\exp(\psi_i)}, \quad p_{32} = \frac{\exp(\psi_8)}{1+\sum_{i=7}^{9}\exp(\psi_i)}, \quad p_{33} = \frac{\exp(\psi_9)}{1+\sum_{i=7}^{9}\exp(\psi_i)}, \\
p_{41} &= \frac{\exp(\psi_{10})}{1+\sum_{i=10}^{12}\exp(\psi_i)}, \quad p_{42} = \frac{\exp(\psi_{11})}{1+\sum_{i=10}^{12}\exp(\psi_i)}, \quad p_{43} = \frac{\exp(\psi_{12})}{1+\sum_{i=10}^{12}\exp(\psi_i)}, \\
g_i &= 1+\tanh(\psi_{i+12}), \qquad \sigma = \exp(\psi_{17}), \qquad \omega_i = \exp(\psi_{i+17}) \qquad \text{for } i = 1,2,3,4
\end{aligned}
\tag{B.4}
$$

また，未知パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ の初期値を，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\theta}^{(0)} &= (p_{11}^{(0)}, p_{12}^{(0)}, p_{13}^{(0)}, p_{21}^{(0)}, p_{22}^{(0)}, p_{23}^{(0)}, p_{31}^{(0)}, p_{32}^{(0)}, p_{33}^{(0)}, p_{41}^{(0)}, p_{42}^{(0)}, \\
&\quad p_{43}^{(0)}, g_1^{(0)}, g_2^{(0)}, g_3^{(0)}, g_4^{(0)}, \sigma^{(0)}, \omega_1^{(0)}, \omega_2^{(0)}, \omega_3^{(0)}, \omega_4^{(0)})' \\
&= (0.8, 0.1, 0.05, 0.1, 0.75, 0.1, 0.05, 0.1, 0.75, \\
&\quad 0.05, 0.05, 0.1, 1, 1, 1, 1, e^{-6}, e^{-5}, e^{-5}, e^{-4})
\end{aligned}
$$

と設定し，以下の式より計算される $\boldsymbol{\psi}$ の初期値 $\boldsymbol{\psi}^{(0)}$ を用いて対数準尤度関数の数値最大化を行った。

$$
\psi_{i+12}^{(0)} = \frac{1}{2}\cdot\log\left(\frac{g_i^{(0)}}{2-g_i^{(0)}}\right), \qquad \psi_{17}^{(0)} = \log\sigma^{(0)}, \qquad \psi_{i+17}^{(0)} = \log\omega_i^{(0)} \qquad \text{for } i = 1,2,3,4
$$

なお，ψ_1 から ψ_{12} の初期値は，式 (B.4) の逆関数を解析的に計算できないため，数値解析的に計算された値を用いた。例えば，ψ_1, ψ_2, ψ_3 の初期値は，-5 から 5 の範囲の数値を 0.1 刻みでそれぞれ 101 個生成し，

$$
p_{11}^{(0)} = \frac{\exp(\psi_1)}{1+\sum_{i=1}^{3}\exp(\psi_i)}, \qquad p_{12}^{(0)} = \frac{\exp(\psi_2)}{1+\sum_{i=1}^{3}\exp(\psi_i)}, \qquad p_{13}^{(0)} = \frac{\exp(\psi_3)}{1+\sum_{i=1}^{3}\exp(\psi_i)}
$$

にもっとも近い ψ_1, ψ_2, ψ_3 の組み合わせを $\psi_1^{(0)}$, $\psi_2^{(0)}$, $\psi_3^{(0)}$ とした。

また，状態 i における濾波期待値，濾波分散，濾波確率の初期値は以下のように設定した。

$$
x_{0|0}^{(i)} = \log P_1, \qquad P_{0|0}^{(i)} = 1, \qquad \Pr(s_0 = i) = \pi_i \qquad \text{for } i = 1,2,3,4
$$

上記初期値およびパラメータ変換のもと，分析対象銘柄の対数株価を PAM_4 に適用することで得られた推定結果を表 B.5, B.6, B.7, B.8 に記載する。

表 B.5　推移確率の推定結果 (PAM_4)

階級	$\hat{p}_{11}$	$\hat{p}_{12}$	$\hat{p}_{13}$	$\hat{p}_{14}$	$\hat{p}_{21}$	$\hat{p}_{22}$	$\hat{p}_{23}$	$\hat{p}_{24}$
クラス 1	92.96 (2.10)	6.86 (2.10)	0.00 (0.00)	0.18	4.80 (1.97)	81.73 (4.19)	13.47 (3.95)	0.00
クラス 2	93.50 (2.03)	6.25 (2.02)	0.00 (0.00)	0.24	3.24 (1.37)	87.04 (3.39)	9.67 (2.98)	0.05
クラス 3	94.13 (2.04)	5.75 (2.04)	0.00 (0.00)	0.12	2.91 (1.33)	88.77 (3.67)	8.24 (3.53)	0.09
クラス 4	94.48 (1.77)	5.45 (1.77)	0.00 (0.00)	0.07	2.80 (1.19)	87.52 (3.51)	9.64 (3.22)	0.03
クラス 5	94.01 (1.97)	5.91 (1.96)	0.00 (0.00)	0.07	3.52 (1.20)	86.75 (3.66)	9.72 (3.32)	0.01
クラス 6	93.95 (1.86)	6.00 (1.85)	0.00 (0.00)	0.04	3.12 (1.36)	88.02 (3.46)	8.79 (3.21)	0.07
クラス 7	93.77 (2.24)	6.13 (2.23)	0.00 (0.00)	0.09	2.99 (1.35)	86.81 (3.68)	10.19 (3.24)	0.01
クラス 8	93.76 (2.35)	6.23 (2.35)	0.00 (0.00)	0.01	2.52 (1.41)	88.23 (4.39)	9.24 (3.92)	0.01
クラス 9	94.21 (2.27)	5.78 (2.27)	0.00 (0.00)	0.01	2.23 (1.17)	90.67 (3.34)	7.10 (2.90)	0.01
クラス 10	95.98 (1.51)	3.99 (1.50)	0.00 (0.00)	0.02	1.71 (0.83)	92.16 (2.67)	6.12 (2.36)	0.01
全体	94.25 (2.01)	5.69 (2.01)	0.00 (0.00)	0.06	2.75 (1.25)	88.50 (3.54)	8.73 (3.19)	0.03

階級	$\hat{p}_{31}$	$\hat{p}_{32}$	$\hat{p}_{33}$	$\hat{p}_{34}$	$\hat{p}_{41}$	$\hat{p}_{42}$	$\hat{p}_{43}$	$\hat{p}_{44}$
クラス 1	0.00 (0.00)	26.28 (5.50)	65.85 (5.89)	7.86	0.00 (0.00)	0.00 (0.00)	35.92 (8.64)	64.08
クラス 2	0.00 (0.00)	18.84 (4.51)	76.57 (5.09)	4.59	0.00 (0.00)	0.00 (0.00)	40.31 (8.82)	59.68
クラス 3	0.00 (0.00)	18.87 (5.06)	76.46 (5.44)	4.68	0.00 (0.00)	0.00 (0.00)	36.76 (11.58)	63.24
クラス 4	0.00 (0.00)	17.15 (4.94)	78.61 (5.60)	4.24	0.00 (0.00)	0.00 (0.00)	36.79 (9.42)	63.21
クラス 5	0.00 (0.00)	17.78 (4.39)	77.95 (4.81)	4.26	0.01 (0.01)	0.00 (0.00)	34.40 (9.99)	65.59
クラス 6	0.00 (0.00)	16.76 (4.25)	79.30 (4.89)	3.94	0.00 (0.00)	0.05 (0.04)	37.77 (9.84)	62.18
クラス 7	0.00 (0.00)	15.87 (4.23)	80.07 (4.66)	4.06	0.01 (0.02)	0.00 (0.00)	36.03 (8.60)	63.96
クラス 8	0.00 (0.00)	15.15 (4.33)	80.51 (5.15)	4.34	0.00 (0.00)	0.01 (0.01)	35.68 (9.19)	64.31
クラス 9	0.00 (0.00)	15.50 (4.04)	80.55 (4.78)	3.95	0.01 (0.00)	0.06 (0.04)	35.89 (8.09)	64.05
クラス 10	0.00 (0.00)	14.90 (3.48)	80.87 (4.34)	4.23	0.00 (0.00)	0.03 (0.02)	27.46 (5.92)	72.51
全体	0.00 (0.00)	16.64 (4.29)	79.05 (4.93)	4.31	0.00 (0.00)	0.02 (0.02)	35.07 (8.78)	64.91

(注 1) $\hat{p}_{ij}$ は状態 i から状態 j への推移確率推定値を階級ごとに算術平均したものである。また，括弧内の数値は $\hat{p}_{ij}$ の標準誤差を階級ごとに算術平均したものである。なお，単位は % である。
(注 2) $\hat{p}_{14}$, $\hat{p}_{24}$, $\hat{p}_{34}$, $\hat{p}_{44}$ は, 制約式 $\hat{p}_{14} = 1 - \sum_{j=1}^{3} \hat{p}_{1j}$, $\hat{p}_{24} = 1 - \sum_{j=1}^{3} \hat{p}_{2j}$, $\hat{p}_{34} = 1 - \sum_{j=1}^{3} \hat{p}_{3j}$, $\hat{p}_{44} = 1 - \sum_{j=1}^{3} \hat{p}_{4j}$ より計算された個別銘柄の推移確率推定値を階級ごとに算術平均したものである。したがって，$\hat{p}_{14}$, $\hat{p}_{24}$, $\hat{p}_{34}$, $\hat{p}_{44}$ は直接推定していない。そのため，当該パラメータの標準誤差は記載していない。

表 B.6　平均持続期間，定常確率の推定結果 (PAM_4)

階級	$\hat{d}_1$	$\hat{d}_2$	$\hat{d}_3$	$\hat{d}_4$	$\hat{\pi}_1$	$\hat{\pi}_2$	$\hat{\pi}_3$	$\hat{\pi}_4$
クラス 1	25.07	8.19	4.35	5.51	24.10	39.39	28.93	7.58
	(23.76)	(4.68)	(2.54)	(7.52)	(11.69)	(12.42)	(12.19)	(5.80)
クラス 2	26.10	9.80	5.70	4.16	20.37	41.11	33.06	5.46
	(21.37)	(4.57)	(2.67)	(6.00)	(10.78)	(9.37)	(10.79)	(5.33)
クラス 3	28.66	12.51	6.67	4.22	20.81	41.84	32.15	5.19
	(29.72)	(7.32)	(3.94)	(4.40)	(11.02)	(9.88)	(11.63)	(4.63)
クラス 4	26.94	10.81	6.37	4.12	20.82	40.26	33.67	5.25
	(20.56)	(5.76)	(3.21)	(3.71)	(10.83)	(9.70)	(11.01)	(5.09)
クラス 5	27.08	12.75	7.36	4.42	19.79	39.55	35.17	5.50
	(20.21)	(9.86)	(4.37)	(4.21)	(11.88)	(11.69)	(12.11)	(4.78)
クラス 6	27.60	12.84	7.68	5.65	20.51	40.01	34.50	4.98
	(23.20)	(8.83)	(4.53)	(13.80)	(10.26)	(11.30)	(11.76)	(4.95)
クラス 7	30.78	15.07	8.66	9.18	18.18	39.48	36.14	6.20
	(34.33)	(11.45)	(5.52)	(27.18)	(11.49)	(12.16)	(13.40)	(5.78)
クラス 8	31.38	16.91	9.05	6.54	18.52	38.96	36.46	6.06
	(30.74)	(13.56)	(6.36)	(8.74)	(12.59)	(12.38)	(13.26)	(5.00)
クラス 9	37.44	24.89	11.11	13.62	19.66	41.28	33.03	6.03
	(35.04)	(22.06)	(9.39)	(29.16)	(13.23)	(12.78)	(12.63)	(5.34)
クラス 10	49.71	31.95	13.88	23.41	20.76	41.33	31.25	6.65
	(47.69)	(24.76)	(11.27)	(54.33)	(12.96)	(12.17)	(13.44)	(5.49)
全体	32.91	17.65	8.96	9.48	19.93	40.30	33.91	5.87
	(32.75)	(16.73)	(7.32)	(26.82)	(11.95)	(11.69)	(12.61)	(5.25)

(注) $\hat{d}_j$，$\hat{\pi}_j$ は状態 j 時の平均持続期間，定常確率推定値を階級ごとに算術平均したものである。また，括弧内の数値は各階級における $\hat{d}_j$，$\hat{\pi}_j$ の横断面標準偏差である。なお，両者の単位はそれぞれ取引日，% である。

表 B.7　調整係数，情報効率性の推定結果 (PAM_4)

階級	$\hat{g}_1$	$\hat{g}_2$	$\hat{g}_3$	$\hat{g}_4$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}$
クラス 1	*0.90* (0.09)	*0.92* (0.08)	*1.10* (0.05)	1.07 (0.08)	77.06 (26.03)	85.93 (17.36)	86.95 (19.30)	80.00 (16.92)	86.82 (9.19)
クラス 2	*0.86* (0.11)	0.97 (0.06)	1.02 (0.05)	1.02 (0.09)	78.22 (22.09)	88.18 (13.45)	91.96 (6.80)	84.55 (10.72)	88.10 (8.15)
クラス 3	0.96 (0.11)	0.98 (0.06)	1.00 (0.05)	1.00 (0.08)	81.15 (20.40)	88.49 (12.78)	92.13 (8.12)	87.86 (10.07)	89.19 (8.31)
クラス 4	*0.88* (0.09)	*0.93* (0.06)	1.00 (0.05)	1.01 (0.08)	78.35 (24.13)	85.22 (19.73)	93.91 (6.12)	88.43 (14.88)	87.70 (12.06)
クラス 5	*0.90* (0.09)	*0.93* (0.07)	0.99 (0.05)	*0.97* (0.08)	78.67 (24.36)	84.97 (19.70)	92.41 (8.94)	89.40 (9.69)	88.45 (10.52)
クラス 6	*0.86* (0.09)	*0.93* (0.06)	0.99 (0.04)	0.99 (0.09)	75.78 (26.63)	87.12 (16.17)	93.32 (8.42)	87.09 (12.36)	88.57 (10.39)
クラス 7	*0.94* (0.09)	*0.94* (0.06)	1.00 (0.05)	1.03 (0.08)	80.55 (22.55)	87.35 (17.19)	93.64 (7.87)	86.07 (20.88)	90.52 (8.29)
クラス 8	*0.88* (0.09)	*0.93* (0.06)	1.00 (0.04)	1.02 (0.08)	79.18 (24.09)	86.48 (19.49)	93.84 (6.82)	88.90 (15.54)	89.66 (12.12)
クラス 9	*0.93* (0.08)	*0.96* (0.06)	1.01 (0.05)	*1.06* (0.09)	81.85 (24.41)	90.10 (14.72)	93.49 (6.79)	87.33 (18.45)	91.13 (10.35)
クラス 10	*0.92* (0.07)	*0.97* (0.05)	0.99 (0.04)	*1.09* (0.08)	84.74 (21.55)	92.24 (9.90)	93.37 (7.90)	87.91 (16.55)	91.72 (9.63)
全体	*0.90* (0.09)	*0.95* (0.06)	1.00 (0.05)	*1.03* (0.08)	80.04 (23.75)	87.93 (16.48)	93.09 (8.26)	87.44 (15.66)	89.66 (10.28)

(注 1) $\hat{g}_j$ は状態 j 時の調整係数推定値を階級ごとに算術平均したものである。また，イタリック体で記載されている $\hat{g}_j$ は，t 統計量 $\sqrt{N_c}[E(\hat{g}_j^c)-1]/SE(\hat{g}_j^c)$ が，帰無仮説 $H_0: g_j = 1$ を有意水準 5% (5 パーセンタイルは ± 1.96) で棄却されたことを意味する。ここで，N_c は階級 c に所属する銘柄数，$E(\hat{g}_j^c)$, $SE(\hat{g}_j^c)$ は階級 c における $\hat{g}_j$ の横断面平均値，標準偏差をそれぞれ意味する。なお，括弧内の数値は $\hat{g}_j$ の標準誤差を階級ごとに算術平均したものである。

(注 2) $\hat{\lambda}_j$ は状態 j 時の情報効率性推定値を階級ごとに算術平均したものである。一方，$\hat{\lambda}$ は定常効率性推定値を階級ごとに算術平均したものである。また，括弧内の数値は各階級における $\hat{\lambda}_j$, $\hat{\lambda}$ の横断面標準偏差である。なお，両者の単位はどちらも % である。

表 B.8　ボラティリティの推定結果 (PAM_4)

階級	$\hat{\sigma}$	$\hat{\omega}_1$	$\hat{\omega}_2$	$\hat{\omega}_3$	$\hat{\omega}_4$	$\hat{\omega}(1)$	$\hat{\omega}(2)$	$\hat{\omega}(3)$	$\hat{\omega}(4)$
クラス 1	0.37	1.09	0.95	2.02	7.50	1.09	2.04	4.06	11.56
	(0.05)	(0.12)	(0.20)	(0.36)	(1.89)	(0.44)	(0.77)	(1.39)	(5.20)
クラス 2	0.36	0.88	0.72	1.86	7.66	0.88	1.60	3.46	11.11
	(0.05)	(0.10)	(0.15)	(0.28)	(1.75)	(0.35)	(0.58)	(1.21)	(4.09)
クラス 3	0.20	0.88	0.71	1.58	6.33	0.88	1.59	3.17	9.50
	(0.07)	(0.12)	(0.16)	(0.30)	(1.55)	(0.39)	(0.67)	(1.47)	(3.85)
クラス 4	0.22	0.89	0.61	1.33	5.63	0.89	1.50	2.82	8.45
	(0.03)	(0.10)	(0.15)	(0.23)	(1.39)	(0.41)	(0.62)	(1.13)	(3.79)
クラス 5	0.20	0.85	0.60	1.26	5.46	0.85	1.45	2.71	8.17
	(0.03)	(0.10)	(0.12)	(0.21)	(1.50)	(0.41)	(0.62)	(1.05)	(4.23)
クラス 6	0.20	0.95	0.57	1.30	5.70	0.95	1.52	2.81	8.51
	(0.03)	(0.10)	(0.13)	(0.23)	(1.56)	(0.43)	(0.60)	(1.12)	(4.61)
クラス 7	0.15	0.99	0.54	1.10	4.40	0.99	1.53	2.63	7.03
	(0.03)	(0.10)	(0.14)	(0.21)	(1.26)	(0.43)	(0.55)	(0.87)	(3.84)
クラス 8	0.17	1.07	0.46	1.05	3.77	1.07	1.53	2.58	6.35
	(0.03)	(0.11)	(0.15)	(0.22)	(1.13)	(0.44)	(0.51)	(0.90)	(2.99)
クラス 9	0.14	1.07	0.47	0.99	2.92	1.07	1.54	2.54	5.46
	(0.03)	(0.11)	(0.14)	(0.20)	(0.96)	(0.37)	(0.45)	(0.77)	(2.29)
クラス 10	0.13	1.08	0.47	0.95	2.36	1.08	1.55	2.50	4.86
	(0.02)	(0.09)	(0.12)	(0.18)	(0.68)	(0.34)	(0.44)	(0.73)	(2.05)
全体	0.18	0.99	0.56	1.21	4.55	0.99	1.54	2.75	7.31
	(0.03)	(0.10)	(0.14)	(0.22)	(1.25)	(0.41)	(0.56)	(1.05)	(3.99)

(注 1) $\hat{\sigma}$, $\hat{\omega}_j$ は攪乱項 u_t, e_t のボラティリティ推定値を階級ごとに算術平均したものである。また，括弧内の数値は $\hat{\sigma}$, $\hat{\omega}_j$ の標準誤差を階級ごとに算術平均したものである。なお，両者の単位はどちらも % である。
(注 2) $\hat{\omega}(j)$ は，計算式 $\hat{\omega}(j) = \sum_{k=1}^{j} \hat{\omega}_k$ によって得られた状態 j 時のファンダメンタル・ノイズ e_t のボラティリティ推定値を階級ごとに算術平均したものである。また，括弧内の数値は各階級における $\hat{\omega}(j)$ の横断面標準偏差である。なお，単位は % である。

【注】

[1] 濾波確率 $\Pr(s_{t-1}=i|y_{1:t-1})$ は，$y_{1:t-1}$ を所与とした時，$t-1$ 期に状態 i が発生する確率を意味する。

[2] 本稿で最尤推定に使用したソフトウェアおよびライブラリは GAUSS 18 と MAXLIK である。また，非線形関数最適化アルゴリズムは BFGS 法を使用した。

[3] 平滑化確率 $\Pr(s_t=j|y_{1:T})$ は，$y_{1:T}$ を所与とした時，t 期に状態 j が発生する確率を意味する。

[4] 式 (A.5) からもわかるように，同時濾波確率 $\Pr(s_t=j,s_{t-1}=i|y_{1:t})$ を計算するためには，$\Pr(s_t=j,s_{t-1}=i|y_{t-1})f(y_t|s_t=j,s_{t-1}=i,y_{1:t-1})$ を $f(y_t|s_t=j,s_{t-1}=i,y_{1:t-1})$ で除す必要がある。しかし，$f(y_t|s_t=j,s_{t-1}=i,y_{1:t-1})$ が極めて小さな値を取る場合，$\Pr(s_t=j,s_{t-1}=i|y_{1:t})$ の計算に失敗するか，極端に大きな値を取るために対数準尤度関数 $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})$ は発散し，結果として最適化に失敗する。

[5] 詳細は Frühwirth-Schnatter (2006) の 322 頁を参照。

[6] 詳細は Ruud (2000) の第 16 章を参照。

[7] 当該変換処理は Kim and Nelson (1999) の 13 頁から 17 頁を参考にしている。

[8] 状態数が 2, 3, 4 のマルコフ転換モデルの推定結果は，著者に連絡することで入手できる。

[9] 詳細は Durbin and Koopman (2012) の第 5 章を参照。

[10] 例えば，分析対象銘柄が極洋 (証券コード：1301) の場合，分析対象期間の最初の証券営業日である 2008 年 11 月 10 日の株価終値である 205 円の対数値が潜在変数の濾波期待値の初期値となる。

[11] 詳細は Durbin and Koopman (2012) の 138 頁を参照。

[12] 詳細は Kim and Nelson (1999) の 29 頁を参照。

[13] 濾波分散の初期値の代替案として，「各銘柄の分析対象期間における対数株価の無条件分散」の適用も試みたが，幾つかの銘柄でエラーが発生したため，採用を見送った。

【引用文献】

Durbin, J., Koopman, S., 2012. Time Series Analysis by State Space Methods (2nd ed.). Oxford University Press.

Frühwirth-Schnatter, S., 2006. Finite Mixture and Markov Switching Models (2nd ed.). Springer.

Kim, C., 1994. Dynamic linear models with markov-switching. Journal of Econometrics 60, 1–22.

Kim, C., Nelson, C., 1999. State-Space Models with Regime Switching: Classical and Gibbs-Sampling Approaches with Applications. The MIT Press.

Ruud, P., 2000. An Introduction to Classical Econometric Theory. Oxford University Press.

千葉賢，2019，「レジーム転換を考慮した価格調整過程の分析」，『経営財務研究』 39，64–85 頁。