



ID	JJF00279
----	----------

論文名	消費ベースモデルによる利子率の期間構造の分析
	Analysis of term-structure of interest rates by a consumption-based model
著者名	池田亮一
	Ryoichi Ikeda
ページ	56-75

雑誌名	経営財務研究
	Japan Journal of Finance
発行巻号	第31巻第1号
	Vol.31 / No. 1
発行年月	2011年6月
	Jun. 2011
発行者	日本経営財務研究学会
	Japan Finance Association
ISSN	2186-3792

## 消費ベースモデルによる利子率の期間構造の分析\*

池田 亮一  
(南山大学)

### 要 旨

本論文は、耐久財を導入した消費ベースモデルを用いて実質利子率の期間構造を分析したものである。新たなモデルによって、既存モデルで説明されなかった米国や英国市場で観察されるイールドカーブの諸性質が得られることを示す。

キーワード：消費 CAPM, Epstein-Zin 型効用関数, 利子率の期間構造, 景気変動, 耐久消費財

## 1 イントロダクション

本論文は、実質利子率の期間構造の性質について消費ベース価格付けモデル（以下消費 CAPM）を用いて説明することを目的としたものである。

消費 CAPM を用いた利子率の導出の研究は多くあるが、その中で Piazzesi and Schneider(2006) は、近年の米国における実質・名目利子率の期間構造の性質を、Epstein-Zin 型効用関数を用いた消費 CAPM によってどの程度説明できるかをテーマにした集大成的な論文と言える。この論文では、実際のデータで見られる長期の名目利子率が既存モデルによって得られたものよりも高いことについて、新たな理論モデルを構築することによって説明することが主眼となっている。理論的に得られた利子率の期間構造は実際のデータで見られる性質と近いものの、いくつかの点で一致していない。特に実質利子率については実証研究で得られる結果と差が大きく、その主なものは以下の通りである。

\* 本稿は「2011 年度南山パツへ研究奨励金 1 - A - 2」による研究成果です。

本論文の執筆にあたり多くの助言や指導をくださった小林孝雄先生（青山学院大学）、論文審査過程において多くの有益なコメントをくださった本誌の匿名レフェリーの方々に、心より感謝申し上げます。

1. 実証結果が示す実質利率の平均イールドカーブは右上がりであるのに対し、理論モデルで示される結果は右下がりとなる。
2. 実証結果に比べ、実質利率のボラティリティがどの満期でも理論モデルのものの方が低い。
3. 実証結果に比べ、特に短い満期での実質利率の系列相関が理論モデルのものの方が低い。

本論文では、通常消費 CAPM では消費財を 1 種類とする仮定を、耐久財と非耐久財の 2 種類と拡張することによって Piazzesi and Schneider(2006) では得られなかった結果を得ることができることを示す。近年 2 財に拡張した消費 CAPM が大きく注目されているが、その端緒となったのは Yogo(2006) である。消費 CAPM において耐久財を導入することの一つの意義は、耐久財の保存量と景気循環が正の高い連動性を持つ点である。通常消費 CAPM で導入する消費財は非耐久財であり、景気循環との連動性は低い。そこで、消費財を耐久財と非耐久財の 2 種類に分割し、投資家が別々の 2 財から効用を得るものとしたモデルを構築することによって、証券リターンと景気循環の関係を論じることができる。Yogo(2006) では耐久財を消費 CAPM に導入することによって株式リスクプレミアムと景気循環の関係を分析した。

本論文では 2 財に拡張した消費 CAPM によって得られるイールドカーブに注目する<sup>1</sup>。興味深いのは、このモデルで得られたイールドカーブでは前述した Piazzesi and Schneider(2006) の 3 つの問題点が解消される点である。特に強調したいのは 1 点目の平均イールドカーブの傾きについてであり、一般的な仮定の下で 1 財のみの消費 CAPM では平均イールドカーブが右上がりになることはないが、2 財に拡張するとある条件の下で右上がりの平均イールドカーブが得られる。

2 財の消費 CAPM に拡張した我々のモデルで最も重要な点は、消費のショックに対する反応は、異時点間の効用の代替弾力性の他に 2 財の消費の代替弾力性にも依存することである。いま、消費にリスクのない 1 期間モデルにおいて、1 期間後の消費財賦与量を上げた場合に利率がどうなるかを考えよう。1 財のみの消費 CAPM のときは、投資家は将来の消費を今期に移転しようとするので、貯蓄需要が落ち利率は高くなる。しかし、いまモデルにおける消費財を完全に代替されない耐久財と非耐久財の 2 種類に拡張し、耐久財賦与量を将来上げる場合を考える。すると、利率の反応の向きは 2 財の代替弾力性と異時点間の効用の代替弾力性という 2 種類の代替弾力性の大小関係に依存して決まる。2 財の代替弾力性が低いほど投資家は 2 種類の財の消費割合を変えようとしにくい。従って、そのような投資家は将来耐久財の賦与が高くなるならば非耐久財の消費量も高めたいと考えるので、今期の消費を抑えようとして貯蓄需要が高まるのである。我々のモデルでは、2 財の代替の弾力性が異時点間の効用の代替弾力性に比べ低い投資家の場合、将来の耐久財保有量が上昇するときに利率が低くなるという、1 財のみの消費 CAPM とは一見逆の結果が得られる。

このように、耐久財の導入によってイールドカーブと景気変動との連動性を論じることができるだけでなく、1 財のみの消費 CAPM では得られなかった新たな性質をもたらすことになる。この論文では、相対的リスク回避度が十分高く、2 財の代替弾力性が異時点間の効用の代替弾力性よりも小さい場合に米国の実証研究と一致する結果が得られることを示唆する。さらに、英国市場における実証研究では、イールドカーブと景気水準は正の連動性を持ち、また平均イールドカーブは右下がりになることが示さ

1 以降、特記がある場合を除き、利率に関する話題ではすべて実質値についてのこととする。

れているが、我々のモデルでは、相対的リスク回避度が高く、2 財の代替弾力性が異時点間の効用の代替弾力性よりも大きい場合にそのようなイールドカーブが得られる。米国と英国の平均イールドカーブの傾きの向きは一致しないが、その違いが 2 財の代替弾力性と異時点間の効用の代替弾力性の大小関係が各国によって異なることに起因することを本論文は示唆する。

本論文におけるモデルは、Yogo(2006)と同様に、代表的投資家が Epstein-Zin 型効用関数によって与えられる選好関係を持つ伝統的な消費 CAPM である。ただし、Yogo(2006)では耐久財は非耐久財と同様に財の売買市場があると仮定されていたが、本論文では耐久財はレンタルによって保有されると仮定する。この仮定によって、モデル上で耐久財はあたかも非耐久財と同様 1 期間で 100% 減価をするように考えることができ、明示的に耐久財の減価を考えなくてはいけなかった Yogo(2006)と比較すると、耐久財と非耐久財の賦与が資産価格に与える影響をよりシンプルに分析することを可能とする。

以下、第 2 節ではモデル説明を、さらに第 3 節ではスポットレートの近似解を与える。第 4 節で計算結果を説明し、第 5 節で結論を述べる。

## 2 モデル

消費財が耐久財及び非耐久財の 2 種類の Lucas 型モデルを仮定する。代表的投資家の選好関係を以下の Epstein-Zin 型効用関数によって定義する。

$$U_t = \left[ (1-\beta)u(C_t, D_t)^{1-1/\psi} + \beta (E_t U_{t+1}^{1-\gamma})^{1/\kappa} \right]^{1/(1-1/\psi)} \quad (1)$$

ただし  $C_t, D_t$  は  $t$  期における非耐久財、耐久財消費量、 $\beta$  は時間選好度を示し、 $\gamma$  を相対的リスク回避度、 $\psi$  を異時点間の効用の代替弾力性として  $\kappa = (1-\gamma)/(1-1/\psi)$  とする。また、 $\rho$  は耐久材・非耐久財の消費量の代替弾力性、 $\alpha$  は耐久財選好度を示し、

$$u(C_t, D_t) = \left[ (1-\alpha)C_t^{1-\rho} + \alpha D_t^{1-\rho} \right]^{1/(1-\rho)} \quad (2)$$

である。耐久財はレンタル市場が存在し、投資家は耐久財をレンタルによって保有すると仮定する。

代表的投資家は、各期に非耐久財を  $C_t$  単位消費し、レンタルによって耐久財を  $D_t$  単位保有する。非耐久財は各期に全て消費されるのに対し、耐久財は 1 期以上に渡り投資家にサービスフローがあると仮定する。

Yogo(2006)などで示されているように、投資家の多期間の消費最適化の 1 階条件より確率的割引ファクター (SDF) は以下のように求められる。

$$M_{t+1} = \left[ \beta \left( \frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-1/\psi} \left( \frac{v(D_{t+1}/C_{t+1})}{v(D_t/C_t)} \right)^{1/\rho-1/\psi} R_{Gt+1}^{1-1/\kappa} \right]^\kappa \quad (3)$$

ただし、

$$v\left(\frac{D}{C}\right) = \left[ 1-\alpha + \alpha \left(\frac{D}{C}\right)^{1-\rho} \right]^{1/(1-\rho)} \quad (4)$$

であり、また  $R_{Gt+1}$  は耐久財及び非耐久財の全賦与を配当として支払う証券のリターンである。

$u(C_t, D_t) = C_t v\left(\frac{D_t}{C_t}\right)$  であるから、 $v(\cdot)$  は  $t$  期における非耐久財 1 単位当たりの効用である。

非耐久財に対する耐久財の相対的レンタル価格を  $P$  とすると、投資家の 2 財の消費に関する最適化の 1 階条件より

$$\frac{u_D}{u_C} = P \quad (5)$$

が成立する。

$$\frac{u_D}{u_C} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \left(\frac{D}{C}\right)^{-1/\rho} \quad (6)$$

より

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} \left(\frac{D_t}{C_t}\right)^{-1/\rho} = P_t \quad (7)$$

である。

均衡では、代表的投資家は配当をすべて消費する。 $t$  期において、耐久財及び非耐久財全体の価値を  $Y_t$ 、それを支払う証券の価値を  $Q_t$  とすると、

$$R_{Gt+1} = \frac{Q_{t+1} + Y_{t+1}}{Q_t} \quad (8)$$

であり、

$$\begin{aligned} Y_t &= C_t + P_t D_t \\ &= \frac{C_t}{1-\alpha} \left(1-\alpha + \alpha \left(\frac{D_t}{C_t}\right)^{1-1/\rho}\right) \\ &= \frac{C_t}{1-\alpha} \left\{ v\left(\frac{D_t}{C_t}\right) \right\}^{1-1/\rho} \end{aligned} \quad (9)$$

である。 $E_t[M_{t+1}R_{Gt+1}] = 1$  より、

$$E_t \left[ \left[ \beta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-1/\psi} \left(\frac{v(D_{t+1}/C_{t+1})}{v(D_t/C_t)}\right)^{1/\rho - 1/\psi} \right]^\alpha R_{Gt+1}^\alpha \right] = 1 \quad (10)$$

従って、価格 - 配当比率  $W_t := \frac{Q_t}{Y_t}$  は

$$E_t \left[ \left[ \beta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-1/\psi} \left(\frac{v(D_{t+1}/C_{t+1})}{v(D_t/C_t)}\right)^{1/\rho - 1/\psi} \left(\frac{(W_{t+1} + 1) Y_{t+1}}{W_t Y_t}\right) \right]^\alpha \right] = 1 \quad (11)$$

を満たす。

いま,

$$x_{t+1} = \log \left( \frac{v(D_{t+1}/C_{t+1})}{v(D_t/C_t)} \right) \quad (12)$$

$$z_{t+1} = \log \left( \frac{C_{t+1}}{C_t} \right) \quad (13)$$

とし、以下のように1期ラグの自己回帰モデルAR(1)を仮定する。

$$x_{t+1} = (1-\phi_x)\mu_x + \phi_x x_t + e_{x,t+1} \quad (14)$$

$$z_{t+1} = (1-\phi_z)\mu_z + \phi_z z_t + e_{z,t+1} \quad (15)$$

ただし、 $e_{x,t+1}$  と  $e_{z,t+1}$  は互いに独立で、平均 0 の i.i.d な正規分布に従うと仮定する。また  $\phi_x > \phi_z > 0$  とする。このとき、全配当の対数成長率は、

$$y_{t+1} = \log \left( \frac{Y_{t+1}}{Y_t} \right) = \log \left( \frac{C_{t+1} \left\{ v \left( \frac{D_{t+1}}{C_{t+1}} \right) \right\}^{1-1/\rho}}{C_t \left\{ v \left( \frac{D_t}{C_t} \right) \right\}^{1-1/\rho}} \right) \quad (16)$$

$$= (1-1/\rho)x_{t+1} + z_{t+1}$$

また、 $t$  期における効用  $u(C_t, D_t)$  の対数成長率は、

$$\log \frac{u(C_{t+1}, D_{t+1})}{u(C_t, D_t)} = x_{t+1} + z_{t+1} \quad (17)$$

と表され、投資家のパラメータによらず  $x_{t+1}$  又は  $z_{t+1}$  が正の場合に効用は正の成長をする。

### 3 スポットレートの解析解

以下では Bansal and Yaron(2004) など示された方法に従って、スポットレートの近似的な解析解を求める。この解析解において、各値そのものを明示的に表すことはできないが、状態変数のショックに対する各満期でのスポットレートの反応の大きさや向きが示される。

#### 3.1 確率的割引ファクター (SDF) と 1 期間スポットレート

$r_{Gt+1} = \log R_{Gt+1}$ ,  $w_t = \log W_t$  とすると、テイラー展開による近似によって

$$r_{Gt+1} \approx k_0 + k_1 w_{t+1} - w_t + y_{t+1} \quad (18)$$

と表すことができる。ただし  $k_1 < 1$  だが、1 に近い値である。この近似により、効用関数の形から

$$w_t = A_0 + A_1 x_t + A_2 z_t \quad (19)$$

と表すことができ、

$$A_1 = \frac{(1-\frac{1}{\rho})\phi_x}{1-k_1\phi_x} \tag{20}$$

$$A_2 = \frac{(1-\frac{1}{\rho})\phi_z}{1-k_1\phi_z} \tag{21}$$

と求めることができる。

これより、対数 SDF :  $m_{t+1} = \log M_{t+1}$  について

$$m_{t+1} = m_0 - (\frac{1}{\psi} - \frac{1}{\rho})\phi_x x_t - \frac{1}{\psi}\phi_z z_t + (\kappa(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\psi}) + (\kappa - 1)\frac{1-\frac{1}{\rho}k_1\phi_x}{1-k_1\phi_x})e_{x,t+1} + (-\frac{\kappa}{\psi} + (\kappa - 1)(\frac{1-\frac{1}{\rho}\phi_z}{1-k_1\phi_z}k_1 + 1))e_{z,t+1} \tag{22}$$

と求められる。さらに1期間スポットレート :

$$r_{f,t} = -\log E_t e^{m_{t+1}} \tag{23}$$

と定義すると

$$r_{f,t} = r_f + (\frac{1}{\psi} - \frac{1}{\rho})\phi_x (x_t - \mu_x) + \frac{1}{\psi}\phi_z (z_t - \mu_z) \tag{24}$$

と書ける。ただし

$$r_f = -m_0 + (\frac{1}{\psi} - \frac{1}{\rho})\phi_x \mu_x + \frac{1}{\psi}\phi_z \mu_z \tag{25}$$

であり、無条件下での1期間スポットレートの期待値である。この導出過程は補遺に記す。

非耐久財の今期の消費量と1期間スポットレートは正に連動するが、これは一般的に知られている一財のみの消費 CAPM の結果に等しい。非耐久財の過程が AR(1) に従っている場合、今期の非耐久財の賦与が高いとき来期の賦与も高い。従って、投資家は今期の消費量を増やそうとし貯蓄需要が減少するため、債券価格は下落し1期間スポットレートが上昇することになる。

一方で、耐久財保有量と1期間スポットレートの連動性は2種類の弾力性の大小関係に依存し、異時点間の効用の代替弾力性  $\psi$  が2財の消費の代替弾力性  $\rho$  を上回っている(下回っている)場合に、耐久財の消費と1期間スポットレートは負(正)の連動性を持つ。

このように、将来の耐久財賦与の予測に対する利子率の反応が2種類の代替の弾力性の大小関係に依存することは、以下のように直観的に理解することができる。いま、将来の耐久財賦与が増大すると期待される場合を考える。このとき、将来の効用が増大すると見込まれることにより、投資家は将来の効用を今期に移転させようとするため今期の貯蓄需要が低くなり、その規模は異時点間の効用の代替弾力性が低いほど大きい。しかしその一方で、将来の耐久財賦与が高くなることにより、投資家は2財の消費割合を調整しようとする。このとき、2財の消費の代替弾力性が低いほど投資家は2財の消費割合を変えようとしなため、非耐久財の消費も増やそうと今期の貯蓄需要を高める。

従って、将来の耐久財賦与についての予測に対する利子率の反応向きは、これら二つの効果のどちらが強いかによって異なるのである。我々のモデルでは、2 財の消費の代替弾力性が異時点間の効用の代替弾力性より低い投資家を仮定した場合、耐久財の将来の賦与が高まると予測されるときには、投資家は非耐久財を将来により消費しようとして貯蓄需要が高まり利子率が下がる。逆の場合、将来の消費を今期に移転しようとする効果が勝り、貯蓄需要を低め利子率を上げるのである。

### 3.2 2 期間以上のスポットレート

続いて 2 期間以上のスポットレートの期間構造の近似解を求める。いま、時刻  $t$  において  $n$  期間後に満期を迎える無リスク債券の対数価格を  $b_{n,t}$  とすると、前節と同様の近似により

$$b_{n,t} = B_{n,0} + B_{n,1}x_t + B_{n,2}z_t \quad (26)$$

と表される。いま、

$$\begin{aligned} b_{n,t} &= \log(E_t[e^{m_{t+1}+b_{n-1,t+1}}]) \\ &= E_t[m_{t+1} + b_{n-1,t+1}] + \frac{1}{2}Var(m_{t+1} + b_{n-1,t+1}) \end{aligned} \quad (27)$$

であるが、新たに

$$Var(m_{t+1} + b_{n-1,t+1}) \approx 0 \quad (28)$$

と近似する。これにより、時刻  $t$  における  $n$  期のスポットレートは

$$\begin{aligned} r_{f,n,t} &= -\frac{b_{n,t}}{n} \\ &= r_f + \frac{(1-\phi_x^n)}{n} \left( \frac{1}{\psi} - \frac{1}{\rho} \right) \frac{\phi_x}{1-\phi_x} (x_t - \mu_x) + \frac{(1-\phi_z^n)}{n} \frac{1}{\psi} \frac{\phi_z}{1-\phi_z} (z_t - \mu_z) \end{aligned} \quad (29)$$

と表される。 $n=1$  のとき(24)の右辺と一致する。この導出過程は補遺に記す。

上の近似解は、債券の将来の価格変動を無視して得られたものである。これはすなわち、あるショックが起こった後消費水準が確定的に平均値に収束すると考えたときの、ショック直後のイールドカーブである。従って、この式は将来の消費に関するリスクが反映されていない近似解であることに注意しなくてはならないが、第 4 節での数値計算で確かめるとおり、消費ショックに対するイールドカーブの動きや形状はこの近似解から予測される動きに一致する。 $\rho < \psi$  ( $\rho > \psi$ ) の投資家を仮定した場合、耐久財の賦与量に対しスポットレートはどの満期でも負(正)の連動性を持ち、さらにその効果はより短期のスポットレートほど大きく影響される<sup>2</sup>。

耐久財の今期の賦与量に対するイールドカーブの反応の向きが、投資家の持つ 2 種類の代替弾力性の大小関係に依存することは、1 期間スポットレートのときの直観的な解釈と同様に説明できる。耐久財賦与量の今期のショックに対する反応の大きさが満期が遠いほど小さくなるのは、賦与量成長率の過

2 これは (29) 式の  $(x_t - \mu_x)$  の係数の一部である  $\frac{(1-\phi_x^n)}{n}$  が  $n$  の減少関数であることから分かる。



程が平均回帰すると仮定したことによる。

興味深い点は、今期の耐久財・非耐久財の賦与量によっては、イールドカーブに山や谷ができる場合があることである。これは、耐久財と非耐久財の賦与量成長率の自己相関係数  $\phi_x$ ,  $\phi_z$  が異なることにより起こる。耐久財賦与量のショックの影響は非耐久財賦与量のより持続性が高いため、耐久財賦与量のショックによって引き起こされたイールドカーブの上昇はより長期のスポットレートにまで及ぶ。いま、イールドカーブを上昇させるような耐久財賦与のショックが起こり、さらに同時にイールドカーブを下落させるような非耐久財賦与のショックが起こった場合を考える。このとき、非耐久財賦与量のショックによるスポットレートへの影響が強ければ短期のスポットレートは下落し、短期でのイールドカーブは右上がりになる。しかし、非耐久財賦与量のショックは持続性が低いため、逆に長期のスポットレートは、耐久財の賦与のショックによる影響によって上昇し、ある期以降のイールドカーブは右下がりとなるのである。これは 1 財のみの消費 CAPM では得られない性質である。

## 4 計算結果

本章では第 2 節で述べたモデルを数値計算によって解いて得られた結果を示す。計算方法は Weil (1989) に基づいた。計算上の AR (1) の近似方法は Tauchen (1986) に従っている。ノードの数は  $x$ ,  $z$  共に 15 とした。

### 4.1 パラメータ設定

パラメータは米国市場の投資家を仮定した既存論文（例として Bansal and Yaron (2004), Yogo (2006), Yang (2009)）における値を参考に、特記しない場合は表 1 の値を用いた。ただし、 $x$  は  $\rho$ ,  $\alpha$  を含む確率変数であるので、 $x$  に関するパラメータはそれらに依存することに注意する。

表 1 パラメータ設定

(a) $\rho$ に依存しないもの		(b) $\rho$ に依存するもの			
$\alpha$	0.8	$\rho$			
$\beta$	0.95	0.8	1	1.2	
$\gamma$	8				
		$\mu_x$	1.64%	1.41%	1.13%
$\mu_z$	2.09%	$\sigma_x$	1.05%	0.90%	0.72%
$\sigma_z$	1.08%	$\phi_x$	0.670	0.671	0.683
$\phi_z$	0.323				

$\alpha$  は耐久財と非耐久財の消費割合を決めるパラメータである。消費全体における耐久財の役割の重要性を考慮し、多くの既存論文で 0.8 程度の値が用いられているので、本論文でもその値を採用する。 $\beta$  はスポットレートの水準を決めるものであり、既存論文で 0.95 ~ 0.99 の様々な値が取られているが、本論文ではイールドカーブの水準ではなくショックに対する反応の向きや大きさを主に調べるという主旨に従い、それらを分かりやすくするために 0.95 という値を採用する。

$\rho$  と  $\psi$  は各消費財に対する反応の向きや大きさを決める重要なパラメータである。既存論文では  $\rho$  は 0.8 から 1.2 程度、 $\psi$  は 1.0 から 1.5 程度が多く使われている。 $\rho > 1$  ( $< 1$ ) のとき、支出全体に占める耐久財消費支出は、D/C の増加 (減少) 関数になる。D/C は年々増加しているので、 $\rho > 1$  ( $< 1$ ) のとき、耐久財消費支出は年々増えて (減って) きていることになる。一方  $\psi > 1$  ( $< 1$ ) のとき価格 - 配当比率は  $x$

や $z$ と正(負)の相関をすることになる。今回は $\psi=0.9, 1.2, 1.5$ ,  $\rho=0.8, 1, 1.2$ に変えて9通りの計算を行った。各 $\rho$ に対応する $x$ に関するパラメータは表 1(b)のように求められた。

$x, z$ に関するパラメータ(長期の平均 $\mu$ , 攪乱項の標準偏差 $\sigma$ , 系列相関 $\phi$ )は The Bureau of Economic Analysis のデータを用いて推定した。データは 1951 年から 2008 年までのものを用いており、また、耐久財保有量, 非耐久財消費量は全人口で割っている<sup>3</sup>。 $\mu, \phi$ は、それぞれ全期間データの標本平均, 標本自己相関係数として求めた。得られた $\mu, \phi$ より各期の攪乱項を求め、その全期間の標

図1 非耐久財消費量 $C_t$ の成長率 ( $z$ の推移)

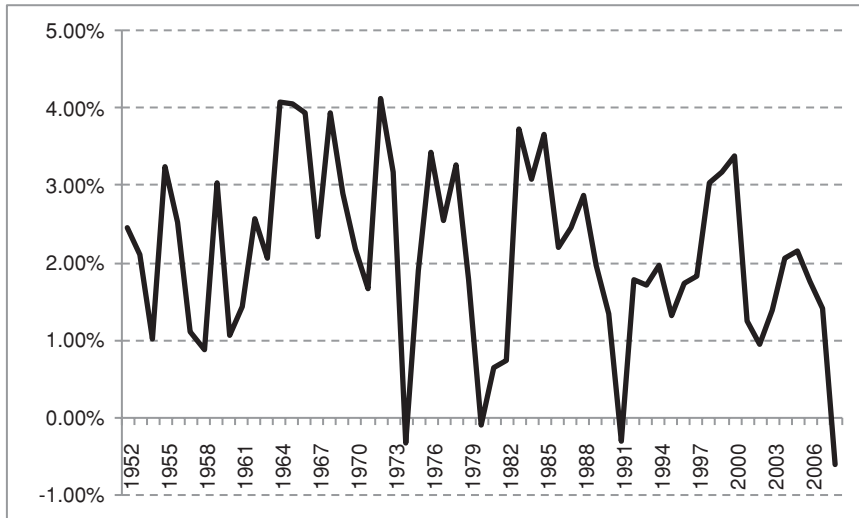
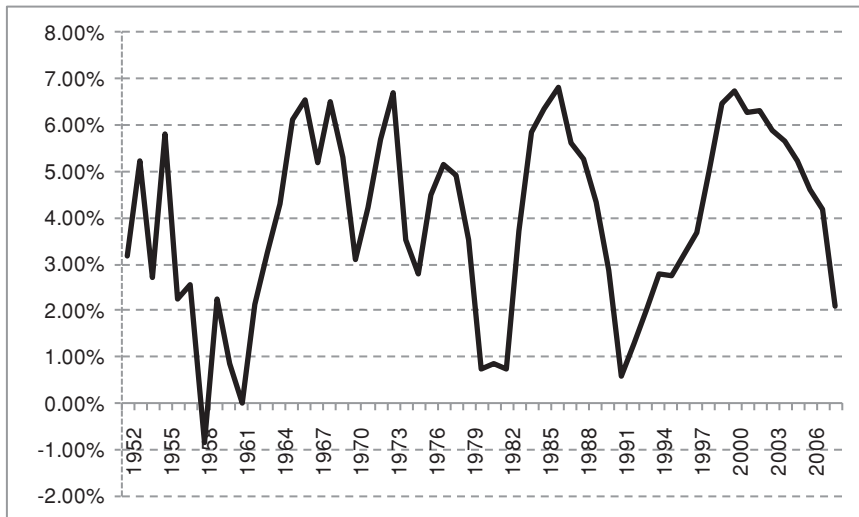
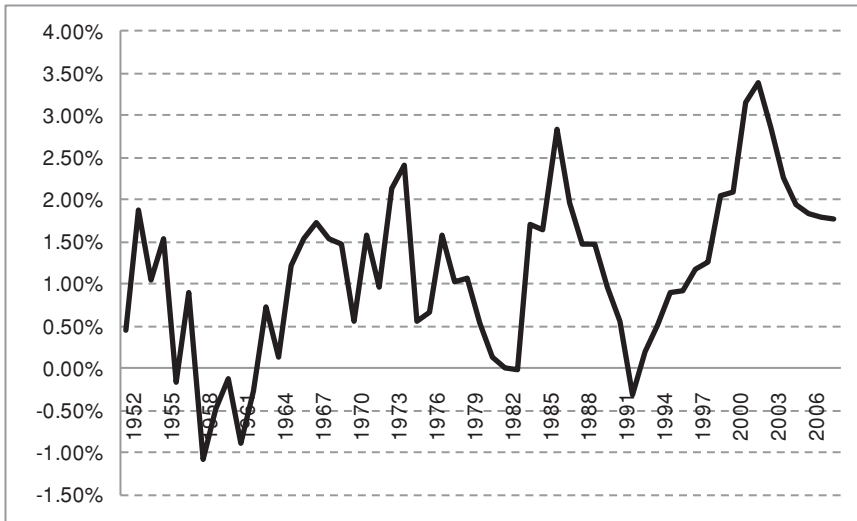


図2 耐久財保有量 $D_t$ の成長率



3 この処理は Yogo(2006), Yang(2009)でも行われている。

図3 xの推移 ( $\rho=1.2$ )



本標準偏差を  $\sigma$  とした。

図 1 から図 3 は、耐久財保有量・非耐久財消費量の成長率、及び  $x$  の推移を表す時系列グラフであり、 $x$  および  $z$  も発散せず AR (1) と仮定しても問題ないことが確認できる<sup>4</sup>。また、 $x$  は景気変動と強く正の連動性を持つことが知られており（例として Yogo (2006)）、 $x$  は景気変動の代理変数と考えることができる。

#### 4.2 消費量の変動リスクと平均イールドカーブ

この項では消費財賦与に変動リスクがある場合に、無条件下での期待値をとった場合のイールドカーブ（平均イールドカーブ）についての計算結果の一部を示し、その性質を考察する。

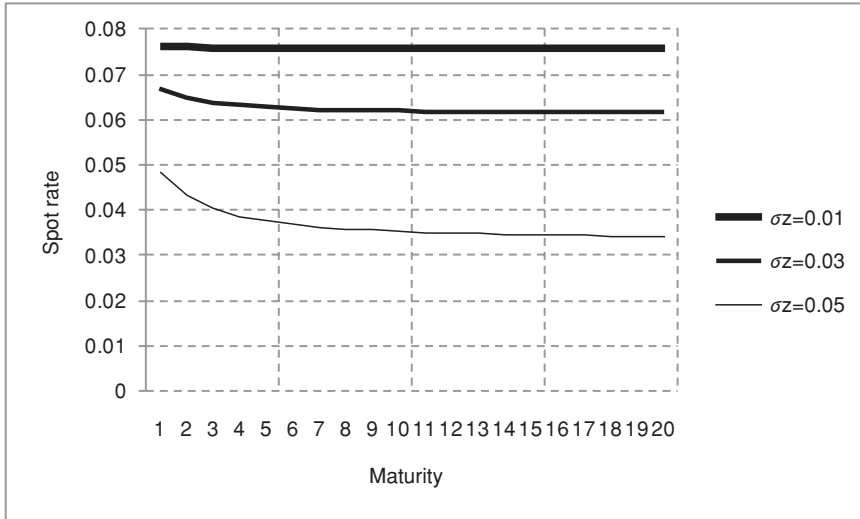
まず 1 財のみの消費 CAPM<sup>5</sup> によって得られる平均イールドカーブの性質を述べる。図 4 のグラフは、平均イールドカーブを  $z$  のボラティリティ毎に 2 種類の  $\psi$  に分けて表したものである。図のように消費リスクが高いほど平均イールドカーブは低くなる。消費量のリスクが高くなると投資家は将来の消費量が落ちることを嫌い、今期の消費を犠牲にして貯蓄をし将来に消費を移転しようとする。従って貯蓄需要が上がり利率は低くなる。

4 同様に  $\rho=0.8, 1$  の場合も  $x$  の過程は発散せず、AR(1) と仮定してすることができる。

5 2 財のモデルにおいて  $\alpha=0$  とした場合に等しい。

図4 非耐久財の消費リスクと平均イールドカーブ（消費財が1種類）

(a)  $\psi=0.9$



(b)  $\psi=1.5$

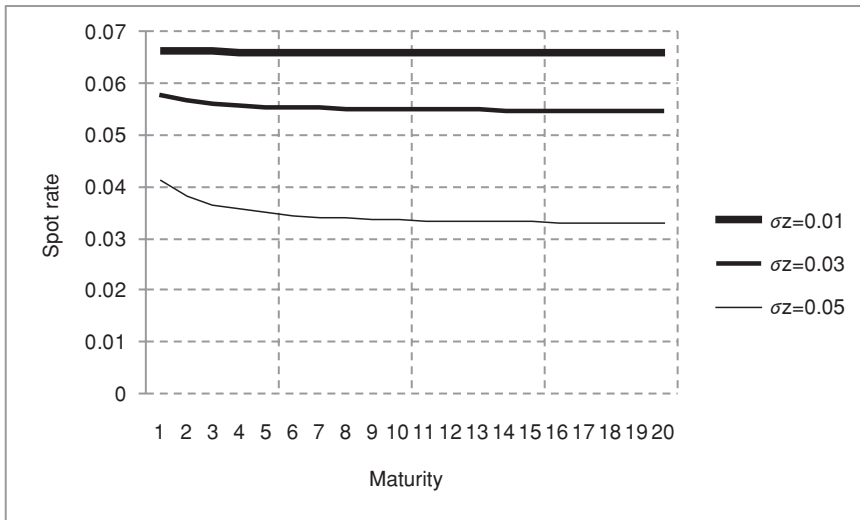
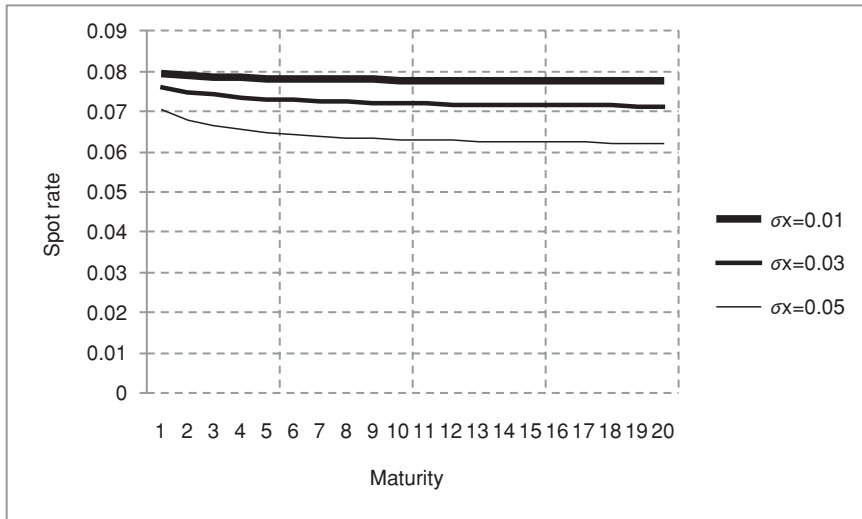


図5 耐久財の消費リスクと平均イールドカーブ（消費財が2種類）

(a)  $(\rho, \psi) = (1.2, 0.9)$



(b)  $(\rho, \psi) = (0.8, 1.5)$

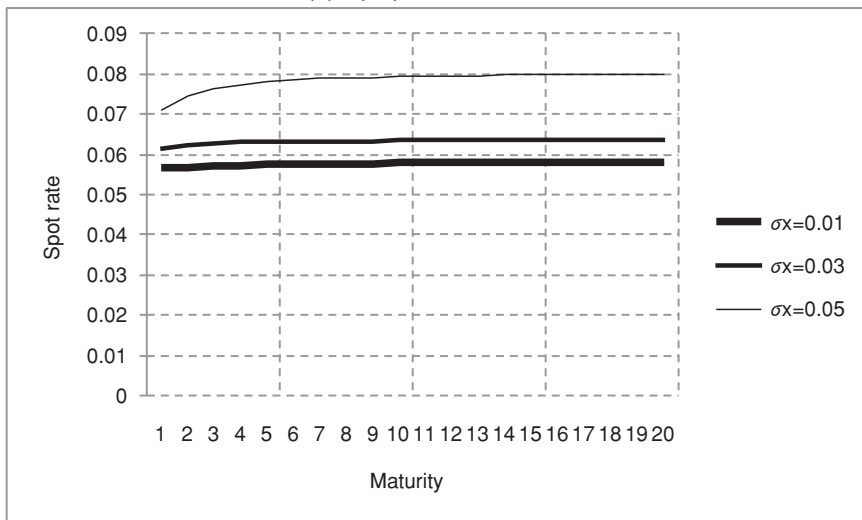
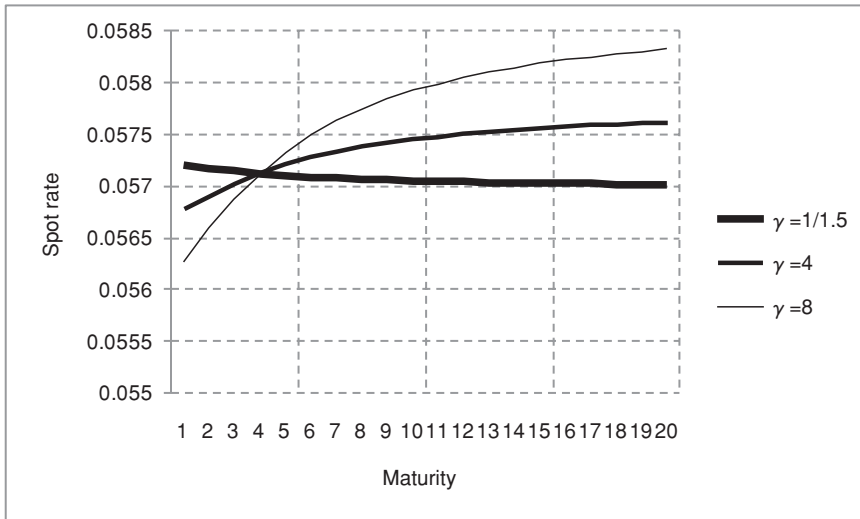


図6 相対的リスク回避度と平均イールドカーブ  
 $((\rho, \psi)=(0.8, 1.5), (\sigma_x, \sigma_z)=(0.01, 0.01))$



さらに消費リスクの大きさによらず、平均イールドカーブは右下がりになっている。これは  $z$  の系列相関が正であることに起因する。いま、2 期後に満期を迎える 2 期債と 1 期後に満期を迎える 1 期債について、どちらが今期高い期待リターンを持つかを考えよう<sup>6</sup>。2 期債の 1 期後の価格は、1 期後の消費がより好調であるほど低い。なぜならば、消費過程の系列相関が正であることから、1 期後に消費が好調であるならば、その 1 期後も好調である可能性が高く、消費 CAPM は消費と正の相関が強い証券程高い期待リターンを与えるからである。従って、今期から見たとき、2 期債の 1 期後の価値は 1 期後の消費と負の相関を持つことになり、1 期後の消費と無相関のペイオフを与える 1 期債と比べると、2 期債はより低い期待リターンを持つことが分かる。このように、満期が遠い債券ほどはより低い期待リターンを持ち、ゆえに平均イールドカーブは右下がりになるのである。つまり、1 財のみの消費 CAPM においては、消費の系列相関が正である下では平均イールドカーブが右上がりになることはないことが直観的に示された。

次に、耐久財を導入したモデルにおいて、耐久財賦与にリスクが存在する場合にイールドカーブがどのような形状を取るかを分析する。図 5 は 2 組の弾力性の値の下で、 $\alpha_x$  を変えて平均イールドカーブを計算したものである。

(a) のように、 $\rho > \psi$  のときには 1 財のみの消費 CAPM と同じようなカーブを描く。すなわち、耐久財賦与のリスクが大きいほど平均イールドカーブは低く、また平均イールドカーブ自体はどのボラティリティでも右下がりである。それに対し、(b) のように  $\rho < \psi$  の場合には、耐久財賦与のリスクが大きいほど平均イールドカーブは高くなり、さらに平均イールドカーブ自体はどのリスクの大きさでも右上がりである。

さらに、図 6 は相対的リスク回避度  $\gamma$  を変えて算出した平均イールドカーブである<sup>7</sup>。図のように  $\gamma$

6 より高い期待リターンを持つ債券が、より高いスポットレートを持つと言えることに注意する。

7  $\gamma=1/1.5$  は、この場合モデルを期待効用関数の下で計算したことと同値である。

が高い場合にはカーブは右上がりだが、 $\gamma$ が低いときにはまた右下がりとなる。

これらは次のように解釈することができる。 $\rho$ は耐久財と非耐久財の消費の代替弾力性であり、 $\rho$ が低い投資家ほど耐久財と非耐久財の消費比率を変化させないようにする性質を持つ。いま、前述の説明と同じように1期後に満期を迎え非耐久財1単位を払う1期債と同じく2期後に満期を迎える2期債のどちらがより割安な債券であるかを考えよう。1期後に耐久財賦与が高い場合、耐久財賦与量に正の系列相関を仮定していることから、そのさらに1期後も耐久財賦与量が高い確率が高い。 $\rho$ が低い投資家は耐久財と非耐久財の消費比率を変えたがらないので、1期後に耐久財賦与が高い場合には低い場合に比べて、そのさらに1期後に与えられる非耐久財1単位はより高い価値を持つ。すなわち、 $\rho$ が低い投資家にとって1期後の2期債の価値が高いのは、1期後の耐久財の賦与量がより高い場合となる。2期債の1期後の証券価値は1期後の耐久財の賦与量と正の相関をとるので、相対的リスク回避度が高い投資家を仮定した場合には、2期債の債券は1期債の債券と比べよりハイリスクとなり、2期債の方が高い期待リターンを持つようになる。逆に相対的リスク回避度が低い投資家を仮定した場合は、1期後に耐久財賦与が低い場合の非耐久財1単位に対する限界効用は限定的で、いまのように $\rho$ が低い投資家を仮定するときには、むしろ耐久財賦与が高い場合の非耐久財1単位に対する限界効用が比較的大きくなるため、1期債と比べローリスクとなり2期債の方が低い期待リターンをとるのである。

このように、異時点間の効用の代替弾力性 $\psi$ が2財の代替弾力性 $\rho$ よりも高く、さらに相対的リスク回避度 $\gamma$ が高いとき、右上がりの平均イールドカーブを得られ、この結果はPiazzesi and Schneider (2006)で示された米国市場における実質利子率の平均イールドカーブの実証結果と一致する。

#### 4.3 景気変動とスポットレート

次に、 $x$ の変動に対する各満期のスポットレートの変動について分析する。 $x$ は景気変動と強い正の連動性を持つので、この分析は景気変動とイールドカーブとの連動性を分析することに等しい。

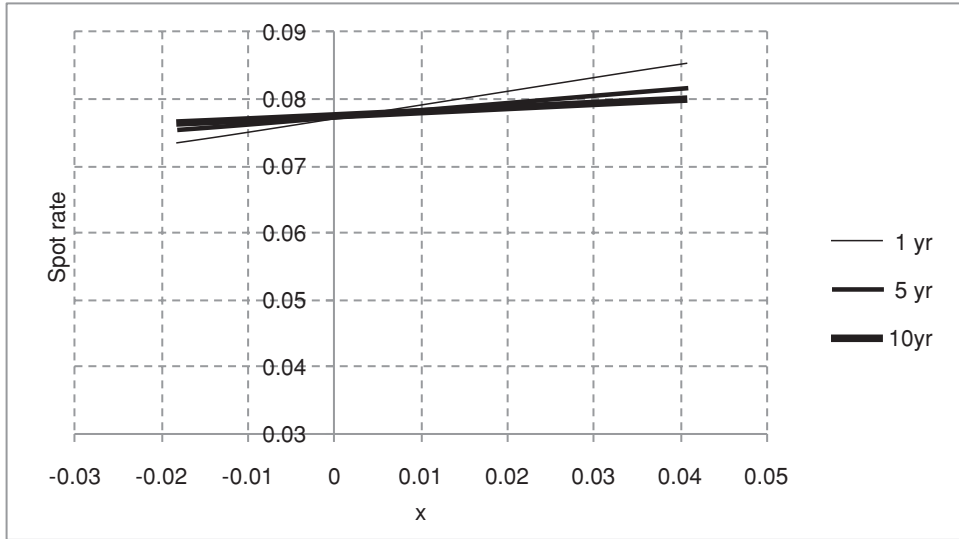
図7は、2種類の代替弾力性を変えたときの $x$ の変化に対するスポットレートの変化を満期ごと（1年、5年、10年）にプロットしたものである。ただし、 $z$ は期待値に等しいとした。

これらのグラフから、近似解が示したように $\rho > \psi$  ( $\rho < \psi$ )のときスポットレートは景気変動と正（負）の連動性を持つことが確認できる。また、 $x$ に対しスポットレートはほぼ直線であることから、近似解は真の解をよく近似していると言える。Seppälä(2004)では、英国の市場において実質利子率のイールドカーブは景気連動と正の連動性を持ち、かつ平均イールドカーブは右下がりであることが示されているが、これは我々のモデルで $\gamma$ が十分に高くかつ $\rho > \psi$ のときに得られる結果と一致する。

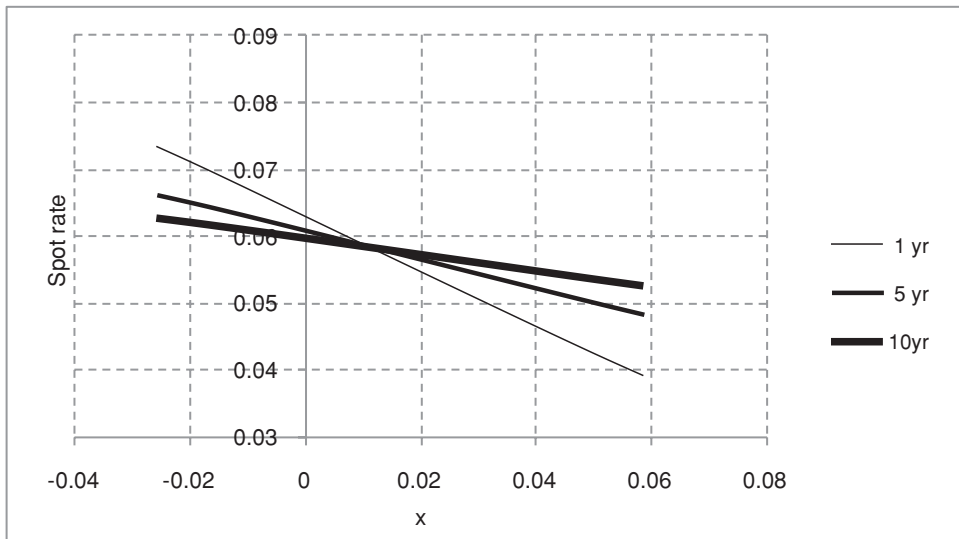
また、図8は $(\rho, \psi) = (0.8, 1.5)$ として、今期の $x$ が平均よりもやや低くさらに $z$ が平均より著しく低い条件下におけるイールドカーブであり、 $x$ や $z$ の今期の状態によってはイールドカーブに山谷ができる場合があることが確認できる。

図7 景気変動とスポットレート

(a)  $(\rho, \psi) = (1.2, 0.9)$



(b)  $(\rho, \psi) = (0.8, 1.5)$



#### 4.4 スポットレートのボラティリティと系列相関

最後に  $x$  と  $z$  がモデルに導入されている場合と  $z$  のみの場合を比較し、スポットレートのボラティリティや系列相関がどれだけ変化するかを分析する。

図 9 は、各満期におけるスポットレートの無条件下における標準偏差（ボラティリティ）である。1 財のみの消費 CAPM での結果に比べ、 $x$  を導入することによってスポットレートのボラティリティは大きくなっている。耐久財と非耐久財の代替弾力性が低いほど、投資家は耐久財・非耐久財両方の消費



図8 山があるイールドカーブ

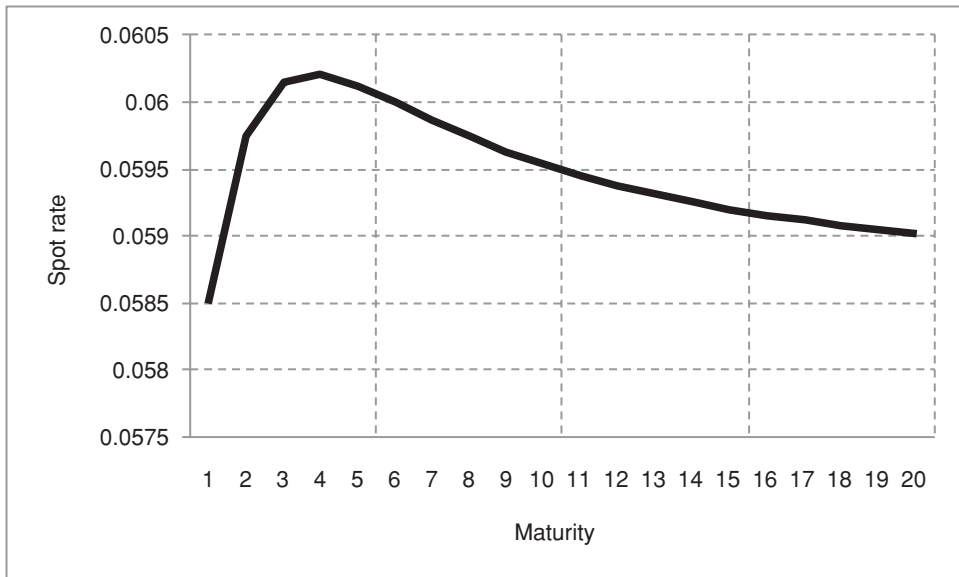


図9 スポットレートのボラティリティ

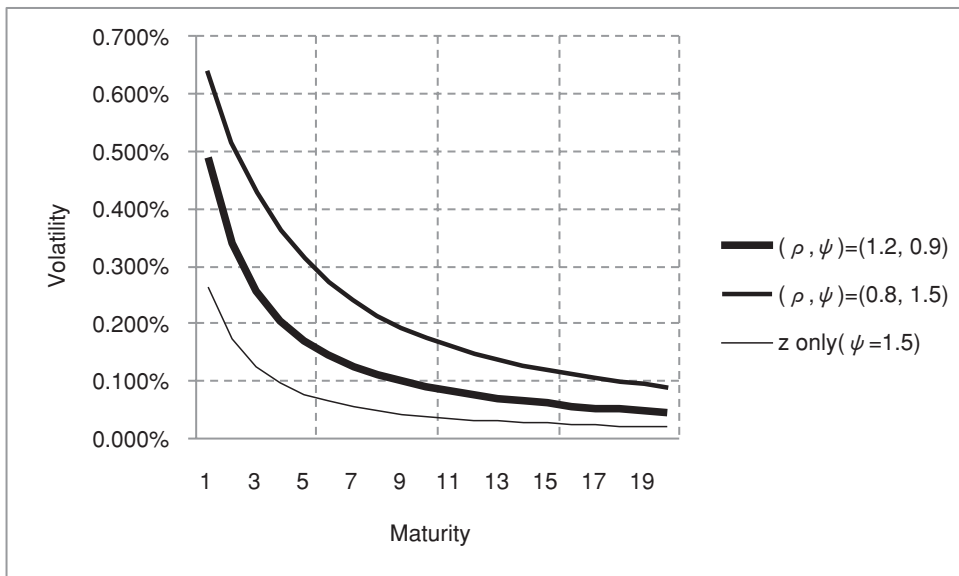
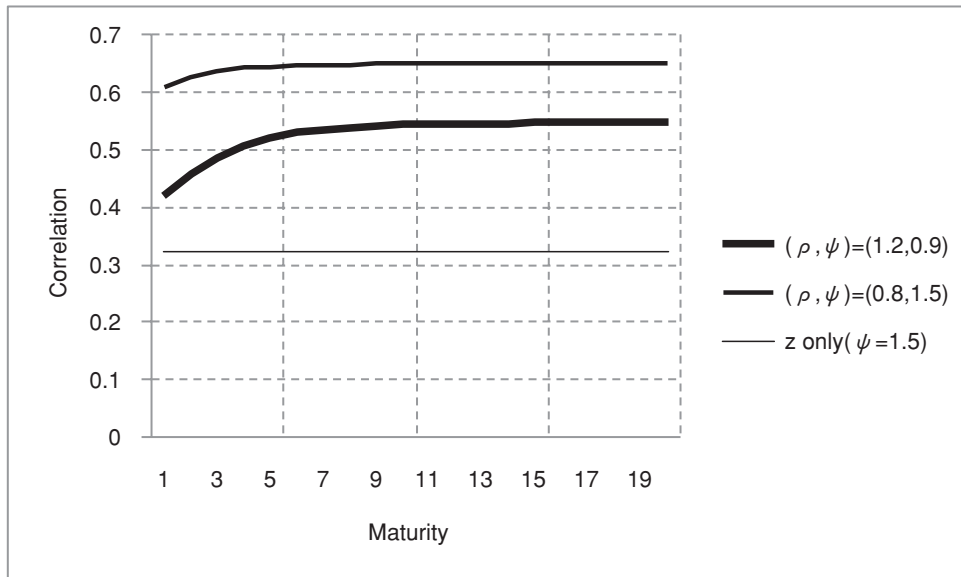


図10 スポットレートの系列相関



リスクの影響をより大きく受けることになり、債券の価格変動もそれが反映される。

さらに、図 10 は各満期でのスポットレートの、無条件下における系列相関を計算したものである。 $z$  のみの場合はどの満期のスポットレートも系列相関は低く、また満期ごとの系列相関に大きな差は見られない。それに対し、 $x$ を導入したモデルでは系列相関は高く、また満期ごとの系列相関に比較的差があり、満期が遠いほど系列相関が高い。 $x$ の過程は $z$ に比べ系列相関がより高いので、耐久財と非耐久財の代替弾力性が低いほど、 $x$ の過程の影響を強く受け、スポットレートの系列相関も高くなる。また、耐久財の導入により、スポットレートの満期によって系列相関に大きな差が現れる理由についても、同様に $x$ の過程の系列相関が $z$ の過程の系列相関に比べ大きいことによる。長期債の価格は、系列相関の高い $x$ のショックによる影響を大きく受け $z$ のショックによる影響は限定的であるが、短期債の価格は $z$ のショックによる影響を無視できない。従ってスポットレートの系列相関についても、長期では $x$ の影響を受けて系列相関が高くなり、より短期になるにつれ $z$ の影響を受け系列相関が低くなるのである。

## 5 結 論

このように耐久財賦与のリスクを新たに消費 CAPM に導入したことにより、1 財のみの消費財のモデルでは現れなかった、右上がりの平均イールドカーブや各満期のスポットレートについてより高いボラティリティやより高い系列相関を得ることができる。本論文は 1 財のみ消費 CAPM と比較して 2 財の消費 CAPM がどのような性質を持つかを分析することを主眼にしており、計算結果では実証研究で見られるものと大きな差異があるものもある。今後は、パラメータをより正確に推定し、米国や英国の市場で見られるデータと整合的な結果をモデルが生み出せるかについて研究が必要である。

我々のモデルの一つの特徴はイールドカーブの景気変動との連動性についても考えることができる点である。Seppälä(2004)では、英国の市場において実質利率のイールドカーブは景気変動と正の連動

性を持ち、かつ平均イールドカーブは右下がりであることが示されているが、これは我々のモデルで  $\rho > \psi$  のときの結果と一致する。Piazzesi and Schneider(2006)では、米国の平均イールドカーブが右上がりとなっていることが示されているが、これは  $\rho < \psi$  とすれば得られる結果である。もしこれが正しいならば米国のイールドカーブは景気変動と負の連動性を持つはずであり、今後の実証研究の結果に注目したい。

さらに物価上昇率をモデルに導入することによって、名目利率の平均イールドカーブの形状や景気との連動性を分析することも可能であり、今後の課題としたい。

## ■補 遺

### A. (20)・(21)式の導出

対数マーケットリターン  $r_{Gt+1}$ , 対数 SDF  $m_{t+1}$  を  $A_1$ ,  $A_2$  を用いて表すと

$$\begin{aligned} m_{t+1} = & (\kappa(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\psi})\phi_x + (\kappa - 1)(A_1(k_1\phi_x - 1) + (1 - \frac{1}{\rho})\phi_x))x_t \\ & + (-\frac{\kappa}{\psi}\phi_z + (\kappa - 1)(A_2(k_1\phi_z - 1) + \phi_z))z_t \\ & + (\kappa(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\psi}) + (\kappa - 1)(A_1k_1 + 1))e_{x,t+1} \\ & + (-\frac{\kappa}{\psi} + (\kappa - 1)(A_2k_1 + 1))e_{z,t+1} + const. \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} r_{Gt+1} = & (A_1(k_1\phi_x - 1) + (1 - \frac{1}{\rho})\phi_x)x_t + (A_2(k_1\phi_z - 1) + \phi_z)z_t \\ & + (A_1k_1 + 1)e_{x,t+1} + (A_2k_1 + 1)e_{z,t+1} + const. \end{aligned} \tag{31}$$

である。これらを  $E_t[M_{t+1}R_{Gt+1}] = E_t[e^{m_{t+1}+r_{Gt+1}}] = 1$  に代入して、

$$\begin{aligned} & E[e^{m_{t+1}+r_{Gt+1}}] \\ & = const \cdot E[\exp(\kappa \left( (A_1(k_1\phi_x - 1) + (1 - \frac{1}{\rho})\phi_x)x_t + (A_2(k_1\phi_z - 1) + (1 - \frac{1}{\psi})\phi_z)z_t \right))] \end{aligned} \tag{32}$$

を得る。各状態変数の係数はすべて0になることが必要なので、(20)・(21)式を得る。

(33)

### B. (29)式の導出

(28)式から

$$b_{n,t} = E_t[m_{t+1}] + E_t[b_{n-1,t+1}] \tag{34}$$

であるから、これを(26)の左辺に代入して整理すると、

$$\begin{aligned}
 & B_{n,0} + B_{n,1}x_t + B_{n,2}z_t \\
 &= \phi_x \left( \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\psi} \right) + B_{n-1,1} \right) x_t + \phi_z \left( -\frac{1}{\psi} + B_{n-1,2} \right) z_t \\
 &+ m_0 + B_{n-1,0} + B_{n-1,1}m_1 + B_{n-1,2}m_2
 \end{aligned} \tag{35}$$

が恒等的に成立する。ただし、

$$\begin{aligned}
 m_1 &= (1 - \phi_x)\mu_x \\
 m_2 &= (1 - \phi_z)\mu_z
 \end{aligned} \tag{36}$$

である。(35)の両辺見比べて

$$B_{n,0} = m_0 + B_{n-1,0} + B_{n-1,1}m_1 + B_{n-1,2}m_2 \tag{37}$$

$$B_{n,1} = \phi_x \left( \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\psi} \right) + B_{n-1,1} \right) \tag{38}$$

$$B_{n,2} = \phi_z \left( -\frac{1}{\psi} + B_{n-1,2} \right) \tag{39}$$

である。

漸化式を解くと、

$$b_{n,t} = nb_1 - \left( \frac{1}{\psi} - \frac{1}{\rho} \right) \frac{(1 - \phi_x^n)\phi_x}{1 - \phi_x} (x_t - \mu_x) - \frac{1}{\psi} \frac{(1 - \phi_z^n)\phi_z}{1 - \phi_z} (z_t - \mu_z) \tag{40}$$

ただし、 $b_1$ は無条件下における1期間後に満期を迎える無リスク債券の対数価格であり、

$$b_1 = m_0 - \left( \frac{1}{\psi} - \frac{1}{\rho} \right) \phi_x \mu_x - \frac{1}{\psi} \phi_z \mu_z \tag{41}$$

である。これより(29)式が得られる。

### 【参考文献】

- [1] Bansal, R., and Yaron, A. (2004), "Risks for the Long Run: A Potential Resolution of Asset Pricing Puzzles", *Journal of Finance*, Vol. 59, pp. 1481–1509.
- [2] Burch, S. W., and Werneke, D. (1975), "The Stock of Consumer Durables, Inflation, and Personal Saving Decisions", *Review of Economics and Statistics*, Vol. 57, pp. 141-154.
- [3] Campbell, J. Y., and Cochrane, J. H. (1999), "By Force of Habit: A Consumption-Based Explanation of Aggregate Stock Market Behavior", *Journal of Political Economy*, Vol. 107, pp. 205-251.
- [4] Cuoco, D., and Liu, H. (2000), "Optimal Consumption of a Divisible Durable Good", *Journal of Economic Dynamics & Control*, Vol. 24, pp. 561-613.
- [5] Duffie, D., and Epstein, L. G. (1992), "Stochastic Differential Utility", *Econometrica*, Vol. 60, pp. 353-394.
- [6] Evans, M. (1998), "Real Rates, Expected Inflation, and Inflation Risk Premia", *Journal of Finance*, Vol.

- 53, pp. 187–218.
- [7] Fernandez-Corugedoa, E., Priceb, S., and Blake, A. P. (2007), “The Dynamics of Aggregate UK Consumers' Non-durable Expenditure”, *Economic Modeling*, Vol. 24, pp. 453-469.
- [8] Hall, R. G. (1978), “Stochastic Implications of the Life Cycle-Permanent Income Hypothesis: Theory and Evidence”, *Journal of Political Economy*, Vol. 86, pp. 971-987.
- [9] Piazzesi, M., and Schneider, M. (2006), “Equilibrium Yield Curves”, *NBER Macroeconomics Annual*, pp. 389-442.
- [10] Seppälä, J, and Xie, L. (2005), “The Cyclical Properties of the Term Structure of Interest Rates”, *SSRN Working Paper Series*.
- [11] Seppälä, J. (2004), “The Term Structure of Real Interest Rates: Theory and Evidence from UK Index-linked Bonds”, *Journal of Monetary Economics*, Vol. 51, pp. 1509-1549.
- [12] Tauchen, G. (1986), “Finite State Markov-chain Approximations to Univariate and Vector Autoregressions”, *Economics Letters*, Vol. 20, pp. 177-181.
- [13] Weil, P. (1989), “The equity premium puzzle and the risk-free rate puzzle”, *Journal of Monetary Economics*, Vol. 24, pp. 401-421.
- [14] Weil, P. (1990), “Nonexpected Utility in Macroeconomics”, *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 105, pp. 29-42.
- [15] Yang, W. (2009), “Asset Pricing with Left-Skewed Long-Run Risk in Durable Consumption”, *Simon School Working Paper*, No. FR 09-09.
- [16] Yogo, M., (2006), “A Consumption-Based Explanation of Expected Stock Returns,” *Journal of Finance*, Vol. 61, pp. 539–580.