ID	JJF00270

論文名	跳躍拡散過程での永久コーラブル・オプション
	Perpetual callable options under jump diffusion processes
著者名	董晶輝 飯原慶雄
	Jing-Hui Dong Yoshio Iihara
ページ	146-162

雑誌名	経営財務研究
	Japan Journal of Finance
発行巻号	第29巻第1.2合併号
	Vol.29 / No. 1.2.
発行年月	2010年3月
	Mar. 2010
発行者	日本経営財務研究学会
	Japan Finance Association
ISSN	2186-3792

■ショート・ペーパー

跳躍拡散過程での永久コーラブル・オプション

董　晶輝
（東洋大学）
飯原　慶雄
（南山大学名誉教授）

要　旨

原資産の価格過程が幾何ブラウン運動に上方と下方のジャンプが加わった場合の永久コーラブル・オプションについて検討する。最初に，２重指数過程について永久コーラブル・オプションの価格を求め，このモデルの展開として，２重買い取り請求権付き優先株について検討する。さらに，２重指数過程を含むより一般的な確率過程として，ジャンプの分布がアーラン型の場合の結果を示す。最後に，モデルの応用について触れる。

キーワード：永久コーラブル・オプション，跳躍拡散過程，２重指数過程，２重アーラン過程

1　はじめに

通常のオプションはオプションの買い手（保有者）が権利を行使するが，これに対し，売り手もある金額を買い手に支払うことにより，買い手の権利を消滅させることができるようなオプションとしてゲーム・オプションがある（Kifer(2000)）。オプションの買い手が権利を行使したときに得られる利得に一定額を加えたものを売り手から買い手に支払うことにより買い手の権利が消滅するタイプのコーラブル・オプションについてはKyprianou(2004)が権利行使期間について制限がなく，いつでも権利が行使できる永久プット・オプションについて価格式を求めている。

実際の資産価格にはしばしば大幅な変動が観察され，資産収益率が正規分布と異なる性質をもつことが実証研究で明らかになっている[1]。それに対応して，ジャンプを含む株価変動モデルとして，上方と下方の双方向のジャンプを含む２重指数過程（double exponential process）が考えられるようになってきた[2]。理論的には，ジャンプを含む確率過程として，2000年以降，レヴィ過程でのオプション理論が広く議論されるようになってきた（Boyarchenko and Levendorskiĭ(2002),Cont and Tankov(2004),

1　Cont and Tankov(2004)の７章およびそこで挙げている文献を参照。

2　２重指数過程を使った実証分析としては，Dotsis, Psychoyios and Markellos(2006); Ramezani and Zeng (2007)などがある。

Kyprianou,Schoutens, and Wilmott(2005), Schoutens(2003))。ここでは，取り扱いが容易で，株価の分析にもしばしば使用されている２重指数過程を考え，いつでも権利が行使できる永久コーラブル・オプションの価格と売り手買い手の権利行使について検討する。最初に永久コーラブル・オプションについてオプション価格を求めるための条件式を示す。次に，このモデルの展開として，２重買取請求権付き優先株について検討する。最後に，２重指数過程の一般化として，ジャンプ幅の対数の分布がアーラン型の場合の条件式を示す。

以下，２節で２重指数過程でのオプション価格を求めるための条件式を示し，３節でコーラブル・オプションに類似するモデルとして２重買取請求権付き優先株について述べる。４節でジャンプの分布がアーラン型であるときのオプション価格を求めるための条件式を示す。５節でこのモデルの応用について触れる。条件式の導出については附録でまとめた。

2　2重指数過程での永久コーラブル・オプション

2.1　2重指数過程

時刻 t での株価を P_t とし，この株式に対し，権利行使価格 K のコール・オプションまたはプット・オプションを考える。オプションはいつでも権利を行使できるアメリカン・タイプで，権利行使の期限についての制限がない永久型とする。時刻 t で買い手が権利を行使した時のペイオフは $(P_t - K)^+$ または $(K - P_t)^+$ となるが，これに対し，オプションの買い手が権利を行使する前に，売り手がオプションを買い戻すことができるタイプのオプションを考える。このようなオプションは一般にゲーム・オプションと呼ばれる（Kifer(2000)）。ここでは，時刻 t での買い戻し価格が，その時点で買い手が権利行使した時のペイオフに δ（定数）を加えた額，すなわち，$(P_t - K)^+ + \delta$ または $(K - P_t)^+ + \delta$ である場合を考える。以下では，このようなオプションをコーラブル・オプションと呼ぶことにする。P_t の変動が幾何ブラウン運動である場合については，Kyprianou(2004)，鈴木・澤木(2006)，董・飯原(2006)で検討されている。

ここでは，株価 P_t の変動がブラウン運動とジャンプを含むものを考える。株価の変動が

$$\frac{dP_t}{P_{t-}} = \mu dt + \sigma dW_t + d\left(\sum_{i=1}^{N_1(t)} (Y_{1,i} - 1)\right) + d\left(\sum_{j=1}^{N_2(t)} (Y_{2,j} - 1)\right)$$

で与えられるものとする。W_t は標準ブラウン運動で，N_1, N_2 はパラメータ λ_1, λ_2 のポアソン過程である。$Y_1 > 1, 0 < Y_2 < 1$ は確率変数で，$y_1 = \log Y_1, y_2 = -\log Y_2$ の確率分布は

$$f_i(y) = \eta_i e^{-\eta_i y}, \quad i = 1, 2$$

とする。ここで，添え字の1と2はそれぞれアップ・ジャンプとダウン・ジャンプを表す。P_t の期待値を有限にするため，$\eta_1 > 1$ とする。W_t, N_1, N_2, Y_1, Y_2 は相互に独立であるとする。

株式の微小時間 dt での配当を $\rho P_t dt (\rho > 0)$ とし，無リスク金利 r は一定であるとする。ジャンプがある場合，株価 P_t のリスク中立的確率は一意に定まらない。Kou and Wang(2004) は，HARA 型の効用関数を持つ代表的個人の合理的期待理論を用いて，オプションのペイオフの期待現在価値がオプションの均衡価格となるような特定のリスク中立確率測度を選び，オプション価格を求めている。このリスク中立確率測度のもとでは原資産の価格過程は依然に2重指数過程に従う。ここでは，彼らに従い，リスク中立的確率測度での株価過程を

$$\frac{dP_t}{P_{t-}} = (\mu^* - \rho)dt + \sigma dW_t^* + d\left(\sum_{i=1}^{N_1^*(t)}(Y_{1,i}^* - 1)\right) + d\left(\sum_{j=1}^{N_2^*(t)}(Y_{2,j}^* - 1)\right)$$

で表す。ここで，

$$\mu^* = r - \frac{\lambda_1^*}{\eta_1^* - 1} + \frac{\lambda_2^*}{\eta_2^* + 1}$$

である[3]。以下では，パラメータの上付き添え字*を省略する。P_t を基底変数 (underlying variable) とする状態請求権の期待現在価値として求められるオプション価格 $V(p)$ は積分微分方程式

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sigma^2 p^2 V''(p) + (\mu - \rho)pV'(p) + \lambda_1 \int_0^\infty [V(e^y p) - V(p)]f_1(y)dy \\ +\lambda_2 \int_0^\infty [V(e^{-y}p) - V(p)]f_2(y)dy - rV(p) = 0\end{aligned} \tag{1}$$

を満たす。リスク中立的確率測度での株価過程のレヴィ冪指数は

$$\Psi(z) = \frac{1}{2}\sigma^2 z(z-1) + (\mu - \rho)z + \lambda_1\left(\frac{\eta_1}{\eta_1 - z} - 1\right) + \lambda_2\left(\frac{\eta_2}{\eta_2 + z} - 1\right) \tag{2}$$

となる[4]。

2.2 コール・オプション

コーラブル・オプションでは，売り手が権利を行使する際の買い戻しプレミアム δ がアット・ザ・マネーでの通常の永久アメリカン・オプション価格より大であるときには，売り手は権利を行使することなく，コーラブル・オプションの価格は通常の永久アメリカン・オプションの価格に等しくなる。そこで，以下では，δ がアット・ザ・マネーでの通常の永久アメリカン・コール・オプション価格より大の場合と，小の場合に分けて，コーラブル・オプションの価格を求める。確率変数の値が p のときの通常の永久アメリカン・コール・オプションの価格を $V_o(p)$，買い手の権利行使限界を p_1 とする。

$$V_o(p) = \begin{cases} p - K & p \geq p_1, \\ \Sigma C_i p^{\alpha_i} & p \leq p_1, \end{cases} \tag{3}$$

とすると，(1) 式が成立するためには，

$$\Psi(\alpha_i) - r = 0$$

$$\Sigma \frac{\eta_1}{\eta_1 - \alpha_i} C_i p_1^{\alpha_i} = \frac{\eta_1}{\eta_1 - 1} p_1 - K$$

3 リスク中立確率測度の導出については Kou(2002) 参照。また，Mordecki(2002) も資産の価格過程がレヴィ過程である場合のリスク中立確率測度の導出について議論している。

4 レヴィ過程については，Bertoin(1996), Sato(1999) を参照。跳躍拡散過程でのレヴィ冪指数については，Boyarchenko,S. and S. Levendorskiĭ(2006) などを参照。

を満足しなければならない[5]。α_1 と α_2 は方程式 $\psi(z) = r$ の2つの正根（$\alpha_1 > \eta_1 > \alpha_2 > 0$）で，係数 C_i を含む項の和の範囲は1から2までである。未知数 C_1, C_2, p_1 は次の連立方程式を解くことにより求められる。

$$\Sigma C_i p_1^{\alpha_i} = p_1 - K \tag{4}$$

$$\Sigma \frac{\eta_1}{\eta_1 - \alpha_i} C_i p_1^{\alpha_i} = \frac{\eta_1}{\eta_1 - 1} p_1 - K \tag{5}$$

$$\Sigma \alpha_i C_i p_1^{\alpha_i} = p_1 \tag{6}$$

(4) 式は p_1 についての価値対応 (value matching condition) 条件で，(6) 式は最大化条件式である。δ がアット・ザ・マネーでの通常の永久アメリカン・コール・オプションの価格より大（$\delta > V_o(K)$）のときには，コーラブル・オプションの価格は通常のアメリカン・コール・オプションの価格 $V_o(p)$ に等しくなる。

δ がアット・ザ・マネーでの通常の永久アメリカン・コール・オプションの価格より小（$\delta < V_o(K)$）のときには，買い手の権利行使限界を p_1，売り手が権利を行使するときの権利行使領域を $[p_3, p_2]$ で表し（$p_1 > p_2 \geq K \geq p_3$），方程式 $\psi(z) = r$ の4つの根を $\alpha_1 > \eta_1 > \alpha_2 > 0 > \alpha_3 > -\eta_2 > \alpha_4$ とすると，確率変数の値が p のときのコーラブル・オプションの価格 $V(p)$ は

$$V(p) = \begin{cases} p - K & p_1 < p, \\ \Sigma A_i p^{\alpha_i} & p_2 < p \leq p_1, \\ p - K + \delta & K < p \leq p_2, \\ \delta & p_3 < p \leq K, \\ \Sigma B_i p^{\alpha_i} & p \leq p_3, \end{cases} \tag{7}$$

と表すことができ（係数 A_i を含む項の和の範囲は1から4までであり，係数 B_i を含む項の和の範囲は1から2までである），A_i, B_i, p_1, p_2, p_3 は次の連立方程式を解くことにより求められる[6]。以下では，η_1 を $\hat{\eta}_1$ で，$-\eta_2$ を $\hat{\eta}_2$ で表すことにする。

$$\Sigma A_i p_1^{\alpha_i} = p_1 - K \tag{8}$$

$$\Sigma A_i p_2^{\alpha_i} = p_2 - K + \delta \tag{9}$$

$$\Sigma B_i p_3^{\alpha_i} = \delta \tag{10}$$

$$\Sigma \frac{\hat{\eta}_1}{\hat{\eta}_1 - \alpha_i} A_i p_1^{\alpha_i} = \frac{\hat{\eta}_1}{\hat{\eta}_1 - 1} p_1 - K \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{K}{p_2}\right)^{\hat{\eta}_\ell} \Sigma \frac{\hat{\eta}_\ell}{\hat{\eta}_\ell - \alpha_i} A_i p_2^{\alpha_i} - \left(\frac{K}{p_3}\right)^{\hat{\eta}_\ell} \Sigma \frac{\hat{\eta}_\ell}{\hat{\eta}_\ell - \alpha_i} B_i p_3^{\alpha_i} \\ &\quad = \left(\frac{K}{p_2}\right)^{\hat{\eta}_\ell} \left(\frac{\hat{\eta}_\ell}{\hat{\eta}_\ell - 1} p_2 - K + \delta\right) - \left(\frac{K}{p_3}\right)^{\hat{\eta}_\ell} \delta - \frac{K}{\hat{\eta}_\ell - 1}, \qquad \ell = 1, 2 \end{aligned} \tag{12}$$

5 これらの式は，δ がアット・ザ・マネーでの永久アメリカン・コール・オプション価格より小の場合の条件式の導出と同様のやり方で求められる。

6 連立方程式の (11),(12) 式の導出は附録Aを参照。

$$\Sigma\alpha_i A_i p_1^{\alpha_i} = p_1 \tag{13}$$

$$\Sigma\alpha_i A_i p_2^{\alpha_i} \leq p_2, \quad p_2 \geq K, \tag{14}$$

$$\Sigma\alpha_i B_i p_3^{\alpha_i} \geq 0, \quad p_3 \leq K, \tag{15}$$

ここで，(8)，(9)，(10) 式は p_1, p_2, p_3 での価値対応条件で，(11)，(12) 式は (1) 式の積分微分方程式より得られる条件式である[7]。(13)，(14)，(15) 式は最適化のための条件式であり，(14) と (15) 式にはそれぞれ２つの不等式が含まれているが，これら２つの不等式はいずれかが等式で成立しなければならない。

2.3 プット・オプション

プット・オプションについては，買い手の権利行使限界を p_1，売り手が権利を行使するときの権利行使領域を $[p_2, p_3]$ で表し（$p_1 < p_2 \leq K \leq p_3$），さらに，$\psi(z) = r$ の解を小さい順に $\alpha_1 < \alpha_2 < 0 < \alpha_3 < \alpha_4$ とする。通常の永久アメリカン・プット・オプションの価格を

$$V_o(p) = \begin{cases} K - p & p \leq p_1, \\ \Sigma C_i p^{\alpha_i} & p \geq p_1, \end{cases} \tag{16}$$

とすると，(4) − (6) 式に対応する式は，(5) の η_1 を $\hat{\eta}_2$ に変更し，(4) − (6) 式の右辺の符号を逆にしたものになる。

アット・ザ・マネーでの通常の永久アメリカン・プット・オプション価格が δ より大である場合には，オプションの価格を

$$V(p) = \begin{cases} K - p & p_1 > p, \\ \Sigma A_i p^{\alpha_i} & p_2 > p \geq p_1, \\ K - p + \delta & K > p \geq p_2, \\ \delta & p_3 > p \geq K, \\ \Sigma B_i p^{\alpha_i} & p \geq p_3, \end{cases} \tag{17}$$

とすると，(8) − (15) 式に対応する式は，(11) 式の $\hat{\eta}_1$ を $\hat{\eta}_2$ に変更し，(8) − (13) 式の右辺と (14) 式の最初の不等式の右辺の δ を除く項の符号を逆にするとともに，(14),(15) 式の不等号の向きを逆にしたものになる。

2.4 数値例

2 重指数過程での永久コーラブル・オプションの権利行使の閾値と価格を求めるためには，連立方程式を数値的に解く必要がある。ここでは，表 1 のパラメータの値を用いて求めたコール・オプション

7 (11) および (12) 式の $l = 1$ は上方のジャンプに関連する条件式で，(12) 式の $l = 2$ は下方のジャンプに関連する条件式である。

の権利行使の閾値と価格を示す。表2では $\psi(z) = r$ の根と権利行使の閾値および係数 A_i, B_i を示し，権利行使領域および株価に対応する永久コーラブル・オプションの価格を図1で示した[8]。

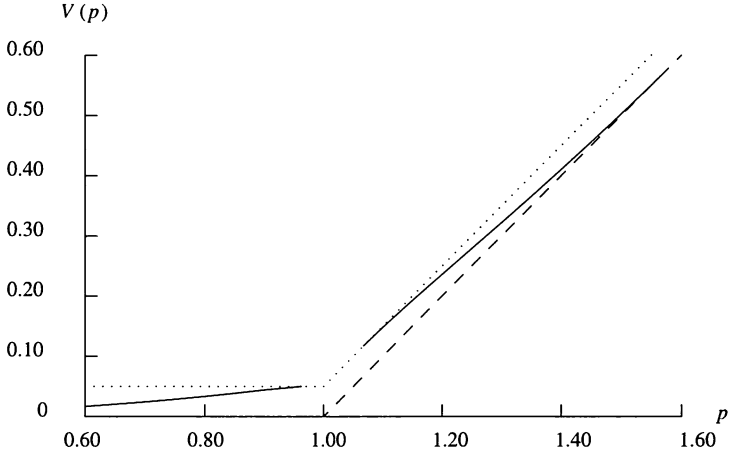
表1　パラメータ値

$\sigma = 0.05$	$r = 0.04$
$\lambda_1 = 2$	$\mu = 0.04$
$\eta_1 = 34$	$\rho = 0.03$
$\lambda_2 = 2$	$K = 1$
$\eta_2 = 32$	$\delta = 0.05$

表2　方程式Ψ(z)=rの根および権利行使の閾値と係数

$\Psi(z) = r$ の根	権利行使の閾値	係数 A_i	係数 B_i
$\alpha_1 = 63.8316$	$p_1 = 1.5699$	$A_1 = 1.1577 \times 10^{-16}$	$B_1 = -0.0229$
$\alpha_2 = 2.3803$	$p_2 = 1.0678$	$A_2 = 0.2060$	$B_2 = 0.0570$
$\alpha_3 = -3.3780$	$p_3 = 0.9620$	$A_3 = -0.1520$	
$\alpha_4 = -67.8340$		$A_4 = -0.1048$	

図1　価格と権利行使領域



（注）点線は売り手の権利行使時の支払額，破線は買い手の権利行使時の支払額で，実線は価格である。

8　K と δ の値が大きくなると冪乗の項が極めて大きな値あるいは極めて零に近い値になるので，K = 1 とした。オプション価格の1次同次性により，K と δ の値を k 倍すると，p_1, p_2, p_3 の値も k 倍になり，図1のグラフの縦軸と横軸の目盛りも k 倍になる。

コーラブル・オプションで，δ が永久オプションのアト・ザ・マネーでの価格より小であると，権利行使価格の前後に売り手の権利行使領域が成立する。株価の変動が幾何ブラウン運動の場合，株価は連続的に変動するので，イン・ザ・マネーあるいはアウト・オブ・ザ・マネーの状態から他の状態に移る前に，売り手が権利を行使することになる。したがって，イン・ザ・マネーでの価格とアウト・オブ・ザ・マネーでの価格を独立に求めることができる。これに対し，株価の変動がジャンプをともなう時には，売り手の権利行使領域を飛び越える可能性があるので，イン・ザ・マネーでの価格とアウト・オブ・ザ・マネーの価格とを独立に求めることができなくなる。

3　2重買取請求権付き優先株

このモデルの展開として2重買取請求権付き優先株について取り上げる。永久コーラブル・オプションといくらか異なるが，類似した考えで結果が得られるので，ここで取り上げることにした。

普通株と優先株を発行している企業を考える。単純化のため，負債のない企業を仮定し，企業価値が普通株と優先株の価値の和であるとする。企業価値 X_t のレヴィ冪指数が(2)式で表せるものとし，普通株と優先株の株式数を n_1 と n_2 とし，優先株の比率を $a = n_2/(n_1 + n_2)$ とする。以下では，総株式数 $n_1 + n_2$ を1とし，優先株式数を a とする。ここでは，優先株主は普通株への転換を請求できる権利を持つとともに，1株を k で買取るよう企業に請求する権利があるタイプの優先株を考える。他方，発行者（企業）もまた，優先株主の権利行使前であれば，いつでも優先株を買い戻すことができるものとする。優先株主はすべて同一の行動をとるものとし，発行者の優先株買い戻しの際の支払総額は優先株主の買い取り請求総額 ak または普通株への転換価値 ax のいずれか大きい方にプレミアム $a\delta$ を加えた額，すなわち，$a[\max(x, k)+\delta]$ とする ($\delta > 0$)。優先株主は X_t の値が x_1 以上になったとき普通株に転換し，x_2 以下になったとき買取を請求し，発行者は企業価値が y_1 と y_2 の間 ($x_2 < y_2 \leq k \leq y_1 < x_1$) にあるときに買い戻しを行うとする。以下ではこのタイプの優先株を双方型と呼び，発行者の買い戻し請求権がないときを一方型と呼ぶことにする。普通株と優先株に対する配当は連続時間で支払われ，企業価値 X_t が x のときの普通株への配当と優先株への配当の合計は cx で，優先株1株に対し一定配当額 b が支払われ，普通株への配当総額は $cx - ab$ であるとする[9]。企業価値 X_t が x のときの優先株の価値 $V(x)$ は微分積分方程式

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 V''(x) + (\mu - \rho)xV'(x) + \lambda_1 \int_0^\infty [V(e^y x) - V(x)]f_1(y)dy$$
$$+\lambda_2 \int_0^\infty [V(e^{-y}x) - V(x)]f_2(y)dy + ab - rV(x) = 0$$

を満たす。

9　普通株への配当総額を $cx - ab$ とすると，$x < ab/c$ では普通株の配当が負になるが，x が x_2 より小となる領域では優先株は存在しなくなるので，$x_2 \geq ab/c$ であれば，普通株の配当は負にならない。

一方型買取請求権付き優先株の価値を

$$V(x)=\begin{cases} ax & x \geq x_1, \\ \Sigma A_i x^{\alpha_i}+\dfrac{ab}{r} & x_1 \geq x \geq x_2, \\ ak & x_2 \geq x \geq ak, \\ x & ak \geq x, \end{cases}$$

とすると（A_i を含む項の和の範囲は1から4である），$A_i\,(i=1,\cdots,4)$, x_1, x_2 を求めるための式は

$$\Sigma A_i x_1^{\alpha_i}=a\left(x_1-\frac{b}{r}\right), \qquad \Sigma A_i x_2^{\alpha_i}=a\left(k-\frac{b}{r}\right),$$

$$\Sigma\frac{\eta_1}{\eta_1-\alpha_i}A_i x_1^{\alpha_i}=a\left(\frac{\eta_1}{\eta_1-1}x_1-\frac{b}{r}\right), \qquad \Sigma\frac{\eta_2}{\eta_2+\alpha_i}A_i x_2^{\alpha_i}=a\left(k-\frac{b}{r}\right)-\frac{ak}{\eta_2+1}\left(\frac{ak}{x_2}\right)^{\eta_2},$$

$$\Sigma\alpha_i A_i x_1^{\alpha_i}=ax_1, \qquad \Sigma\alpha_i A_i x_2^{\alpha_i}\geq 0, \quad x_2\geq ak$$

となる。ただし，最後の2つの不等式はいずれか一方が等式で成立しなければならない[10]。

$X_t=k$ で，一方型買取請求権付き優先株の価値が $a\delta$ より小のときには企業は優先株の買い戻しを行わないのが最適であり，双方型の価値は一方型のそれと等しくなる。一方型買取請求権付き優先株の価値が $a\delta$ より大のときの双方型の価値を

$$V(x)=\begin{cases} ax & x \geq x_1, \\ \Sigma A_i x^{\alpha_i}+\dfrac{ab}{r} & x_1 \geq x \geq y_1, \\ a(x+\delta) & y_1 \geq x \geq k, \\ a(k+\delta) & k \geq x \geq y_2, \\ \Sigma B_i x^{\alpha_i}+\dfrac{ab}{r} & y_2 \geq x \geq x_2, \\ ak & x_2 \geq x \geq ak, \\ x & ak \geq x, \end{cases}$$

とし（A_i, B_i を含む項の和の範囲は1から4である），$\hat{\eta}_1=\eta_1$，$\hat{\eta}_2=-\eta_2$ とすると，A_i, $B_i\,(i=1,\cdots,4)$, x_1, y_1, y_2, x_2 を求めるための式は

$$\Sigma A_i x_1^{\alpha_i}=a\left(x_1-\frac{b}{r}\right), \qquad \Sigma B_i x_2^{\alpha_i}=a\left(k-\frac{b}{r}\right),$$

$$\Sigma\frac{\hat{\eta}_1}{\hat{\eta}_1-\alpha_i}A_i x_1^{\alpha_i}=a\left(\frac{\hat{\eta}_1}{\hat{\eta}_1-1}x_1-\frac{b}{r}\right), \qquad \Sigma\frac{\hat{\eta}_2}{\hat{\eta}_2-\alpha_i}B_i x_2^{\alpha_i}=a\left(k-\frac{b}{r}\right)+\frac{ak}{\hat{\eta}_2-1}\left(\frac{x_2}{ak}\right)^{\hat{\eta}_2},$$

$$\Sigma A_i y_1^{\alpha_i}=a\left(y_1+\delta-\frac{b}{r}\right), \qquad \Sigma B_i y_2^{\alpha_i}=a\left(k+\delta-\frac{b}{r}\right),$$

$$\left(\frac{k}{y_1}\right)^{\hat{\eta}_\ell}\Sigma\frac{\hat{\eta}_\ell}{\hat{\eta}_\ell-\alpha_i}A_i y_1^{\alpha_i}-\left(\frac{k}{y_2}\right)^{\hat{\eta}_\ell}\Sigma\frac{\hat{\eta}_\ell}{\hat{\eta}_\ell-\alpha_i}B_i y_2^{\alpha_i}$$
$$=a\left[\left(\frac{k}{y_1}\right)^{\hat{\eta}_\ell}\left(\frac{\hat{\eta}_\ell}{\hat{\eta}_\ell-1}y_1+\delta-\frac{b}{r}\right)-\left(\frac{k}{y_2}\right)^{\hat{\eta}_\ell}\left(k+\delta-\frac{b}{r}\right)-\frac{k}{\hat{\eta}_\ell-1}\right], \qquad \ell=1,2$$

$$\Sigma\alpha_i A_i x_1^{\alpha_i}=ax_1, \qquad \Sigma\alpha_i B_i x_2^{\alpha_i}\geq 0, \quad x_2\geq ak$$

$$\Sigma\alpha_i A_i y_1^{\alpha_i}\leq ay_1, \quad y_1\geq k, \qquad \Sigma\alpha_i B_i y_2^{\alpha_i}\geq 0, \quad y_2\leq k$$

10 これらの式および以下の式の導出については附録を参照。

となる。最後の最適化のための式は，等式を除き，６個の不等式は２個を１組として，それらの不等式のいずれか一方は等式で成立しなければならない。

このモデルの数値例を次に示す。パラメータ値と方程式 $\psi(z) - r = 0$ の根を表３に示した。

表４に優先株主と企業の権利行使の閾値を示した。図２に優先株主にのみ買取請求権がある場合と企業にも買い戻し請求権がある場合を示した。上の曲線が優先株主にのみ請求権がある場合である。

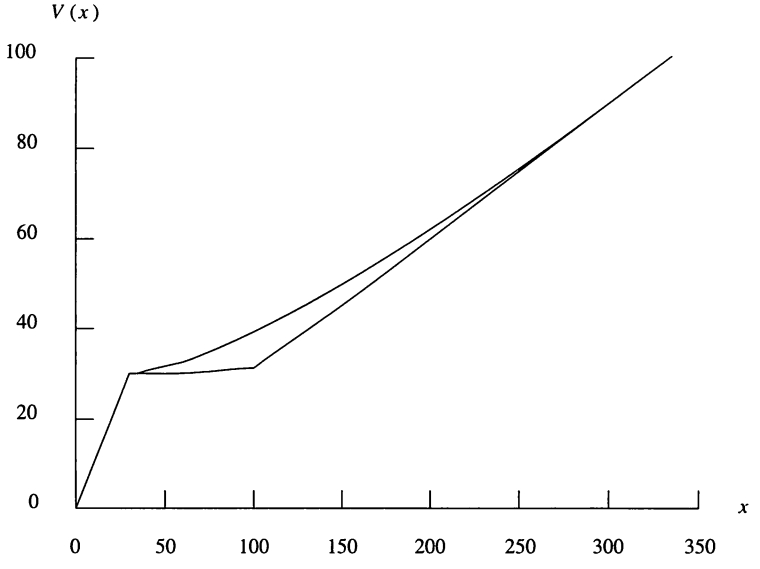
表３　パラメータ値及び方程式の根

パラメータ値		$\Psi(z)=r$ の根
$\sigma^2 = 0.06$		$\alpha_1 = 13.9195$
$c = 0.02$	$r = 0.02$	$\alpha_2 = 1.3061$
$\lambda_1 = 1$	$\lambda_2 = 1$	$\alpha_3 = -0.3045$
$\eta_1 = 11$	$\eta_2 = 9$	$\alpha_4 = -11.9212$
$b = 1$	$k = 100$	
$a = 0.3$	$\delta = 4$	

表４　権利行使の閾値

一方型買取請求権		双方型買取請求権			
x_1	x_2	x_1	y_1	y_2	x_2
303.31	34.44	177.05	103.37	98.96	53.14

図２　優先株の価値



4　2重アーラン過程での永久コーラブル・オプション

2重指数過程の一般化として，ジャンプ率の対数 y_i (i = 1, 2) の分布がアーラン分布

$$f_i(y) = \frac{\eta_i(\eta_i y)^{k_i-1}e^{-\eta_i y}}{(k_i-1)!}, \quad i = 1, 2$$

であると，レヴィ冪指数の式(2)は，$\eta_1/(\eta_1 - z)$ と $\eta_2/(\eta_2 + z)$ の項が $(\eta_1/(\eta_1 - z))^{k_1}$ と $(\eta_2/(\eta_2 + z))^{k_2}$ に変わる。k_1, k_2 は非負の整数である。

方程式 $\psi(z) = r$ は $k_1 + 1$ 個の実数部が正の根と k_2+1 個の実数部が負の根をもつ。$n = k_1+k_2+2$ として，これらの根を α_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) とする。ただし，α_j は実数部について大きい順に並べ，添え字 j が1から $k_1 + 1$ までのものは実数部が正で，$k_1 + 2$ から n までのものは実数部が負であるようにする。

買い手の権利行使限界を p_1，売り手が権利を行使するときの権利行使領域を $[p_3, p_2]$ とする（$p_1 > p_2 \geq K \geq p_3$）。株価が p のときの通常の永久アメリカン・コール・オプションの価格 $V_o(p)$ を

$$V_o(p) = \begin{cases} p - K & p \geq p_1, \\ \Sigma C_j p^{\alpha_j} & p \leq p_1 \end{cases} \tag{18}$$

とし，δ がアット・ザ・マネーでの永久アメリカン・コール・オプション価格より小のときの永久コーラブル・コール・オプションの価格 $V(p)$ を

$$V(p) = \begin{cases} p - K & p_1 < p \\ \Sigma A_j p^{\alpha_j} & p_2 < p \leq p_1, \\ p - K + \delta & K < p \leq p_2, \\ \delta & p_3 < p \leq K, \\ \Sigma B_j p^{\alpha_j} & p \leq p_3, \end{cases} \tag{19}$$

と表す。ただし，A_j を含む項の和の範囲は1から n まで，B_j と C_j を含む項の和の範囲は1から $k_1 + 1$ までである。

A_j を要素とする n 次の列ベクトルを A，B_j, C_j を要素とする $k_1 + 1$ 次の列ベクトルを B, C，$p^{\alpha_j}, \alpha_j p^{\alpha_j}$ を要素とする n 次の列ベクトルを $\mathrm{P}(p)$, $\alpha(p)$ とし，$\ell = 1, 2$ について，$(\hat{\eta}_l/(\hat{\eta}_l - 1))^i$ を要素とする k_l 次の列ベクトルを h_l，$(\hat{\eta}_l/\hat{\eta}_l - 1))^i p^{\alpha_j}$ を (i, j) 要素とする $k_l \times n$ 次の行列を $\mathrm{H}_l(p)$ とする。また，$\mathrm{P}(p)$, $\alpha(p)$ の最初の $k_l + 1$ 個の要素からなる列ベクトルをそれぞれ $\hat{\mathrm{P}}(p)$, $\hat{\alpha}(p)$ とし，$\mathrm{H}_l(p)$ の要素のうち，最初の $k_l + 1$ 列からなる $k_l \times (k_l + 1)$ 次の行列を $\hat{\mathrm{H}}_l(p)$ で表す。これらの行列とベクトルを使用すると，永久コール・オプションの価格 $V(p)$ について，(4) − (6) 式に対応する式は

$$\hat{\mathbf{P}}(p_1)^\top \mathbf{C} = p_1 - K \tag{20}$$

$$\hat{\mathbf{H}}_1(p_1)\mathbf{C} = p_1 \mathbf{h}_1 - K \mathbf{1}_1 \tag{21}$$

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}(p_1)^\top \mathbf{C} = p_1 \tag{22}$$

となる[11]。また，k_l 次の正方行列 $S_\ell(p)$ を

$$\mathbf{S}_\ell(p) = \mathbf{S}(\hat{\eta}_\ell \log p, k_\ell - 1)/p^{\hat{\eta}_\ell},$$

$$\mathbf{S}(a,i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a^i/i! & \cdots & a & 1 \end{bmatrix}$$

とすると，(8) − (15) に対応する式は

$$\mathbf{P}(p_1)^\top \mathbf{A} = p_1 - K \tag{23}$$

$$\mathbf{P}(p_2)^\top \mathbf{A} = p_2 - K + \delta \tag{24}$$

$$\hat{\mathbf{P}}(p_3)^\top \mathbf{B} = \delta \tag{25}$$

$$\mathbf{H}_1(p_1)\mathbf{A} = p_1 \mathbf{h}_1 - K\mathbf{1}_1 \tag{26}$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{S}_\ell(p_2)\mathbf{H}_\ell(p_2)\mathbf{A} - \mathbf{S}_\ell(p_3)\hat{\mathbf{H}}_\ell(p_3)\mathbf{B} \\ &\quad = \mathbf{S}_\ell(p_2)[p_2\mathbf{h}_\ell - (K-\delta)\mathbf{1}_\ell] - \delta\mathbf{S}_\ell(p_3)\mathbf{1}_\ell - K\mathbf{S}_\ell(K)(\mathbf{h}_\ell - \mathbf{1}_\ell), \quad \ell = 1,2 \end{aligned} \tag{27}$$

$$\boldsymbol{\alpha}(p_1)^\top \mathbf{A} = p_1 \tag{28}$$

$$\boldsymbol{\alpha}(p_2)^\top \mathbf{A} \le p_2, \quad p_2 \ge K \tag{29}$$

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}(p_3)^\top \mathbf{B} \ge 0, \quad p_3 \le K \tag{30}$$

となる。(29) と (30) 式に含まれる２つの不等式はいずれかが等式で成立しなければならない。

プット・オプションについては，買い手の権利行使限界を p_1，売り手が権利を行使するときの権利行使領域を $[p_2, p_3]$ とし $(p_1 < p_2 \le K \le p_3)$，ベクトル B, C の次数を $k_2 + 1$, $\hat{\mathrm{P}}(p)$, $\hat{\alpha}(p)$ および $\hat{\mathrm{H}}_l(p)$ を $\mathrm{P}(p)$, $\alpha(p)$ および $\mathrm{H}_l(p)$ の最後の $k_2 + 1$ 個あるいは $k_2 + 1$ 列（すなわち，実数部が負の根に対応する要素ないしは列）からなるベクトルと行列とする。通常の永久アメリカン・プット・オプションの価格を

$$V_o(p) = \begin{cases} K - p & p \le p_1, \\ \hat{\mathbf{P}}(p)^\top \mathbf{C} & p \ge p_1 \end{cases} \tag{31}$$

とし，δ がアット・ザ・マネーでの永久アメリカン・プット・オプション価格より小のときの永久コーラブル・プット・オプションの価格を

11 これらの式および以下の式の導出については附録 B を参照。

$$V(p) = \begin{cases} K - p & p_1 > p \\ \mathbf{P}(p)^\top \mathbf{A} & p_2 > p \geq p_1, \\ K - p + \delta & K > p \geq p_2, \\ \delta & p_3 > p \geq K, \\ \hat{\mathbf{P}}(p)^\top \mathbf{B} & p \geq p_3, \end{cases} \tag{32}$$

とすると，永久アメリカン・プット・オプションについて，(20) − (22) 式に対応する式は，(21) 式の行列とベクトルの添え字を 1 から 2 に変更し，(20) − (22) 式の右辺の項の正負の符号を逆にすることで得られる。また，永久コーラブル・プット・オプションについては，(23) − (30) 式に対応する式は，(26) 式の行列とベクトルの添え字を 1 から 2 に変更し，(23) − (28) 式の右辺と (29) 式の最初の不等式の右辺のうち δ がかかる項を除いた他のすべての項の正負を逆にし，(29),(30) 式の不等号の向きを逆にすることで得られる。

5 おわりに

原資産の価格過程として幾何ブラウン運動を仮定すると，δ がアット・ザ・マネーでの通常の永久アメリカン・オプションの価格より小のとき（$\delta < V_a(K)$ のとき）売り手の権利行使領域は権利行使価格 K 一点になるか，または非常に狭い範囲になることが多い。この場合には，売り手が合理的に行動するものとすれば，原資産価格がイン・ザ・マネーの状態にあると，アウト・オブ・ザ・マネーの状態に移る前に，売り手は権利行使をすることになり，アウト・オブ・ザ・マネーの状態にある時も同様に，イン・ザ・マネーの状態に移る前に売り手は権利を行使することになる。また，売り手の権利行使領域の下限は権利行使価格 K になる（$p_3 = K$）。これらの性質は確率過程がジャンプを含む場合には成立しなくなる。

本稿ではこうした点を考慮して，満期を特定しないでいつでも権利が行使できる永久型のコーラブル・オプションについて，原資産の価格過程がジャンプを含む場合のオプション価格について検討した。このモデルが利用できるような場としては次のようなものが考えられるであろう。

ストック・オプションは従業員に与えるコール・オプションであるが，これに対し企業に買戻し権がある場合を考える。この場合，企業の業績が向上し株価が上がった場合には従業員は権利を行使し株式を受け取る。逆に，株価が低迷したときには，企業がオプションのペイオフに一定の額を上乗せした額を従業員に支払うことになる。δ がそれほど大きくなければ，企業は買戻し権を付けることにより，ストック・オプション発行のコストを抑えることができる。ストック・オプションは一般にアウト・オフ・ザ・マネーの状態で発行されることから，企業が先に権利行使する可能性が大きくなるが，このことを解消するためには，イン・ザ・マネーの領域で，特定の値をあらかじめ決めておき，株価が最初にこの値以上に達した後に，双方の権利行使が可能となるという条件をつければよい。この場合のコーラブル・ストック・オプションの価値は最初に特定の値以上に達したときの株価に対応するコーラブル・ストック・オプションの価値をそれまでの時間 (first passage time) で割り引くことにより得られる。

董・飯原（2004）では，幾何ブラウン運動の場合のコール型のコーラブル・オプションの応用例として為替連動型貸借契約を考えたが，プット型のコーラブル・オプションとして，為替レート連動型預金を考えることができる。預金者はいつでも預金の解約を申し出ることができ，その際，銀行は，円 / ドルレート X と定額 K の差 $(K - X)^+$ を支払う。他方，銀行もいつでも預金者に $(K - X)^+ + \delta$ を支払うことでこの預金契約を解消することができる。預金期間中の利子は零とし，当初の預金額で調整する

ことにする。この契約は双方にとって，資金を必要とする時に資金を得ることができ，円安になる時に企業業績が向上するような企業にとっては，円高による損失を補償し，円安時に銀行が契約を解除してもその損失はそれほど問題にならないであろうから考慮に値する契約となる。

八木・澤木(2005)およびYagi and Sawaki(2005)は企業価値を原資産として償還条項付き転換社債の価格を求めている。そこでは，社債の満期は有限としているが，満期が無限大となる永久債を考えれば，ここで取り上げた2重買取請求権付き優先株に類似するものになる。

さらに応用の範囲を広げると，取り消し可能なダム開発契約の分析などに応用することが考えられる。将来の水需要の予測が困難なことから，ダムの開発の中止などの問題が発生している。行政機関は開発業者に，ダムの開発権を与えるとともに，水の需要が低下したときには行政機関が補償金を支払うことでダム開発権を取り消すことができる契約を考える。ダム開発の開始は開発業者が決定できることに置けば，ここでのモデルを利用して，補償金の大きさの効果その他を分析できる。

附録A　2重指数過程での条件式の導出

条件式のうち価値対応条件と最適化のための条件はよく知られているので，ここでは，(11)式と(12)式の導出について述べる。これらの式の導出に当たっては，Kou and Wang (2004)と同様に，積分微分方程式を解くという方法を採用した。Kou and Wang(2004)の場合は，ジャンプが指数分布の永久アメリカン・オプションについて価格式を求めているが，ここでは，永久コーラブル・オプションであるため，条件式はやや複雑になる。

以下では，$\log p$ を x で，$\log p_1, \log p_2, \log p_3$ をそれぞれ x_1, x_2, x_3 で表すことにする。したがって，積分微分方程式は $x_2 < x \le x_1$ と $-\infty < x \le x_3$ の範囲で成立する。$x_2 < x \le x_1$ のとき，(1)式に(7)式を代入し，整理すると，

$$\begin{aligned}
&\Sigma\left(\Psi(\alpha_i) - \lambda_1\frac{\eta_1}{\eta_1-\alpha_i} - \lambda_2\frac{\eta_2}{\eta_2+\alpha_i} - r\right)A_i e^{\alpha_i x} \\
&\quad +\lambda_1\left[\int_0^{x_1-x}\Sigma A_i e^{\alpha_i(x+y)}f_1(y)dy + \int_{x_1-x}^{\infty}(e^{x+y}-K)f_1(y)dy\right] \\
&\quad +\lambda_2\left[\int_0^{x-x_2}\Sigma A_i e^{\alpha_i(x-y)}f_2(y)dy + \int_{x-x_2}^{x-\log K}(e^{x-y}-K+\delta)f_2(y)dy\right. \\
&\qquad\qquad \left. +\int_{x-\log K}^{x-x_3}\delta f_2(y)dy + \int_{x-x_3}^{\infty}\Sigma B_i e^{\alpha_i(x-y)}f_2(y)dy\right] = 0
\end{aligned} \tag{A1}$$

となる。この式の積分の部分は，下限（$y=0$）は1行目の第2項と第3項に相殺し，残りの λ_1 と λ_2 を含む項は，

$$\begin{aligned}
&-\lambda_1 e^{\eta_1 x}\left(\Sigma\frac{\eta_1}{\eta_1-\alpha_i}A_i e^{-(\eta_1-\alpha_i)x_1} - \frac{\eta_1}{\eta_1-1}e^{-(\eta_1-1)x_1} + Ke^{-\eta_1 x_1}\right) \\
&\quad -\lambda_2 e^{-\eta_2 x}\left(\Sigma\frac{\eta_2}{\eta_2+\alpha_i}A_i e^{(\eta_2+\alpha_i)x_2} - \frac{\eta_2}{\eta_2+1}e^{(\eta_2+1)x_2} + (K-\delta)e^{\eta_2 x_2}\right. \\
&\quad \left. +\frac{\eta_2}{\eta_2+1}e^{(\eta_2+1)\log K} - (K-\delta)e^{\eta_2\log K} - \delta e^{\eta_2\log K} + \delta e^{\eta_2 x_3} - \Sigma\frac{\eta_2}{\eta_2+\alpha_i}B_i e^{(\eta_2+\alpha_i)x_3}\right)
\end{aligned} \tag{A2}$$

となる。任意の x について，(A1)式が成立するためには，$e^{\eta_1 x}$ と $e^{-\eta_2 x}$ の係数は零でなければならない。これらの条件式は $e^{x_1}, e^{x_2}, e^{x_3}$ を p_1, p_2, p_3 に置き換えると，

$$\Sigma\frac{\eta_1}{\eta_1-\alpha_i}A_ip_1^{\alpha_i}-\frac{\eta_1}{\eta_1-1}p_1+K=0 \tag{A3}$$

$$\begin{aligned}&\left(\Sigma\frac{\eta_2}{\eta_2+\alpha_i}A_ip_2^{\alpha_i}-\frac{\eta_2}{\eta_2+1}p_2+K-\delta\right)p_2^{\eta_2}\\&\qquad+\left(\frac{\eta_2}{\eta_2+1}K-K\right)K^{\eta_2}+\left(\delta-\Sigma\frac{\eta_2}{\eta_2+\alpha_i}B_ip_3^{\alpha_i}\right)p_3^{\eta_2}=0\end{aligned} \tag{A4}$$

となる。

$-\infty< x\leq x_3$ のときには，上の場合と同様の計算により，

$$\begin{aligned}&\Sigma\frac{\eta_1}{\eta_1-\alpha_i}B_ie^{-(\eta_1-\alpha_i)x_3}-\delta e^{-\eta_1x_3}+\delta e^{-\eta_1\log K}\\&-\frac{\eta_1}{\eta_1-1}e^{-(\eta_1-1)\log K}+(K-\delta)e^{-\eta_1\log K}+\frac{\eta_1}{\eta_1-1}e^{-(\eta_1-1)x_2}-(K-\delta)e^{-\eta_1x_2}\\&\quad-\Sigma\frac{\eta_1}{\eta_1-\alpha_i}A_ie^{-(\eta_1-\alpha_i)x_2}+\Sigma\frac{\eta_1}{\eta_1-\alpha_i}A_ie^{-(\eta_1-\alpha_i)x_1}-\frac{\eta_1}{\eta_1-1}e^{-(\eta_1-1)x_1}+Ke^{-\eta_1x_1}\end{aligned}$$

が零でなければならないことになる。最後の項は(A2)式から，零になり，したがって，

$$\begin{aligned}&\left(\Sigma\frac{\eta_1}{\eta_1-\alpha_i}A_ip_2^{\alpha_i}-\frac{\eta_1}{\eta_1-1}p_2+K-\delta\right)/p_2^{\eta_1}\\&\qquad+\left(\frac{\eta_1}{\eta_1-1}K-K\right)/K^{\eta_1}+\left(\delta-\Sigma\frac{\eta_1}{\eta_1-\alpha_i}B_ip_3^{\alpha_i}\right)/p_3^{\eta_1}=0\end{aligned} \tag{A5}$$

となる。

附録B　2重アーラン過程での条件式の導出

アーラン分布の場合，(A2)式に対応する式は

$$-\lambda_1e^{\eta_1x}\sum_{i=1}^{k_1}\frac{\eta_1^{k_1-i}}{(k_1-i)!}(x_3-x)^{k_1-i}G_{1i}-\lambda_2e^{-\eta_2x}G_2(x)$$

となる。ただし，G_{1i} と $G_2(x)$ は

$$G_{1i}=\Sigma\left(\frac{\eta_1}{\eta_1-\alpha_i}\right)^kA_ie^{-(\eta_1-\alpha_i)x_1}-\left(\frac{\eta_1}{\eta_1-1}\right)^ke^{-(\eta_1-1)x_1}+Ke^{-\eta_1x_1} \tag{A6}$$

$$\begin{aligned}G_2(x)=\sum_{i=1}^{k_2}\frac{\eta_2^{k_2-i}}{(k_2-i)!}\Bigg\{&(x-x_2)^{k_2-i}\left[\sum_{j=0}^{k_1}\left(\frac{\eta_2}{\eta_2+\alpha_j}\right)^iA_je^{(\eta_2+\alpha_j)x_2}\right.\\&\left.+\sum_{j=0}^{k_2}\left(\frac{\eta_2}{\eta_2+\beta_j}\right)^iB_je^{(\eta_2+\beta_j)x_2}-\left(\frac{\eta_2}{\eta_2+1}\right)^ie^{(\eta_2+1)x_2}+(K-\delta)e^{\eta_2x_2}\right]\\&+(x-\log K)^{k_2-i}\left[\left(\frac{\eta_2}{\eta_2+1}\right)^ie^{(\eta_2+1)\log K}-(K-\delta)e^{\eta_2\log K}-\delta e^{\eta_2\log K}\right]\\&+(x-x_3)^{k_2-i}\left[\delta e^{\eta_2x_3}-\sum_{j=0}^{k_1}\left(\frac{\eta_2}{\eta_2+\alpha_j}\right)^iC_je^{(\eta_2+\alpha_j)x_3}\right]\Bigg\}\end{aligned} \tag{A7}$$

である[12]。したがって，任意の x について，(A1) 式に対応する式が成立するためには，G_{1i} と $G_2(x)$ は零でなければならない。$G_{1i}=0$ という条件を行列とベクトルを使って表現すると，(26) 式になる。他方，$G_2(x)$ は x の k_2-l 次式で，$(\eta_2 x)^{k_2-l}/(k_2-l)!$ の係数は

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{l}\frac{\eta_2^{l-i}}{(l-i)!}\Bigg\{&(-x_2)^{l-i}\Bigg[\sum_{j=0}^{k_1}\left(\frac{\eta_2}{\eta_2+\alpha_j}\right)^i A_j e^{(\eta_2+\alpha_j)x_2}+\sum_{j=0}^{k_2}\left(\frac{\eta_2}{\eta_2+\beta_j}\right)^i B_j e^{(\eta_2+\beta_j)x_2}\\&\qquad-\left(\frac{\eta_2}{\eta_2+1}\right)^i e^{(\eta_2+1)x_2}+(K-\delta)e^{\eta_2 x_2}\Bigg]\\&+(-\log K)^{l-i}\left[\left(\frac{\eta_2}{\eta_2+1}\right)^i e^{(\eta_2+1)\log K}-(K-\delta)e^{\eta_2\log K}-\delta e^{\eta_2\log K}\right]\\&+(-x_3)^{l-i}\left[\delta e^{\eta_2 x_3}-\sum_{j=0}^{k_1}\left(\frac{\eta_2}{\eta_2+\alpha_j}\right)^i C_j e^{(\eta_2+\alpha_j)x_3}\right]\Bigg\},\quad l=1,2,\ldots,k_2\end{aligned}\tag{A8}$$

となり[13]，これらの係数は零でなければならない。この条件を行列とベクトルを使って表現すると (27) 式になる。

---

12 これらの結果は，アーラン分布の密度関数

$$f(y)=\frac{\eta(\eta y)^{k-1}e^{-\eta y}}{(k-1)!},\qquad y\geq 0,\ \eta>0$$

に対し，

$$\int_{b-x}^{c-x}e^{a(x+y)}f(y)dy=e^{\eta x}\sum_{j=1}^{k}\frac{\eta^{k-j}}{(k-j)!}\left(\frac{\eta}{\eta-a}\right)^j\left[(b-x)^{k-j}e^{-(\eta-a)b}-(c-x)^{k-j}e^{-(\eta-a)c}\right]$$

$$\int_{x-b}^{x-c}e^{a(x-y)}f(y)dy=e^{-\eta x}\sum_{j=1}^{k}\frac{\eta^{k-j}}{(k-j)!}\left(\frac{\eta}{\eta+a}\right)^j\left[(x-b)^{k-j}e^{(\eta+a)b}-(x-c)^{k-j}e^{(\eta+a)c}\right]$$

となり，$b=x$ のとき，それぞれの式の右辺の第1項は

$$\left(\frac{\eta}{\eta-a}\right)^k e^{ax},\qquad \left(\frac{\eta}{\eta+a}\right)^k e^{ax}$$

となることを利用した。

13 ここでの変換は，$(x-a)^{k-j}$ を2項展開し，合計の順序を入れ替え，x の $k-1$ 次の多項式で表現すると，

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k}\frac{(x-a)^{k-j}b^j}{(k-j)!}&=\sum_{j=1}^{k}\frac{b^j}{(k-j)!}\sum_{h=0}^{k-j}\binom{k-j}{h}x^h(-a)^{k-j-h}\\&=\sum_{h=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{k-h}\frac{b^j}{h!(k-j-h)!}(-a)^{k-j-h}(x)^h=\sum_{l=1}^{k}\frac{x^{k-l}}{(k-l)!}\sum_{j=1}^{l}\frac{b^j(-a)^{l-j}}{(l-j)!}\end{aligned}$$

となることを利用した。

$-\infty < x \le x_3$ のときには，上の場合と同様の計算により，

$$
\begin{aligned}
G_3(x) = \sum_{i=1}^{k_1} \frac{\eta_1^{k_1-i}}{(k_1-i)!} \Bigg\{ & (x_3-x)^{k_1-i} \left[\sum_{j=0}^{k_1} \left(\frac{\eta_1}{\eta_1-\alpha_j} \right)^i C_j e^{-(\eta_1-\alpha_j)x_3} - \delta e^{-\eta_1 x_3} \right] \\
& + (\log K - x)^{k_1-i} \left[\delta e^{-\eta_1 \log K} - \left(\frac{\eta_1}{\eta_1-1} \right)^i e^{-(\eta_1-1)\log K} + (K-\delta) e^{-\eta_1 \log K} \right] \\
& + (x_2-x)^{k_1-i} \Bigg[\left(\frac{\eta_1}{\eta_1-1} \right)^i e^{-(\eta_1-1)x_2} - (K-\delta) e^{-\eta_1 x_2} \\
& - \sum_{j=0}^{k_1} \left(\frac{\eta_1}{\eta_1-\alpha_j} \right)^i A_j e^{-(\eta_1-\alpha_j)x_2} - \sum_{j=0}^{k_2} \left(\frac{\eta_1}{\eta_1-\beta_j} \right)^i B_j e^{-(\eta_1-\beta_j)x_2} \Bigg] \\
& + (x_1-x)^{k_1-i} \Bigg[\sum_{j=0}^{k_1} \left(\frac{\eta_1}{\eta_1-\alpha_j} \right)^i A_j e^{-(\eta_1-\alpha_j)x_1} + \sum_{j=0}^{k_2} \left(\frac{\eta_1}{\eta_1-\beta_j} \right)^i B_j e^{-(\eta_1-\beta_j)x_1} \\
& - \left(\frac{\eta_1}{\eta_1-1} \right)^i e^{-(\eta_1-1)x_1} + K e^{-\eta_1 x_1} \Bigg] \Bigg\}
\end{aligned}
$$

が零でなければならないことになる。$G_3(x)$ の最後の部分は G_{1i} であるから，この部分は零になり，$G_3(x)$ で，$(-\eta_1 x)^{k_1-l}/(k_1-l)!$ の係数は

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{l} \frac{\eta_1^{l-i}}{(l-i)!} \Bigg\{ & x_3^{l-i} \left[\sum_{j=0}^{k_1} \left(\frac{\eta_1}{\eta_1-\alpha_j} \right)^i C_j e^{-(\eta_1-\alpha_j)x_3} - \delta e^{-\eta_1 x_3} \right] \\
& + (\log K)^{l-i} \left[\delta e^{-\eta_1 \log K} - \left(\frac{\eta_1}{\eta_1-1} \right)^i e^{-(\eta_1-1)\log K} + (K-\delta) e^{-\eta_1 \log K} \right] \\
& + x_2^{l-i} \Bigg[\left(\frac{\eta_1}{\eta_1-1} \right)^i e^{-(\eta_1-1)x_2} - (K-\delta) e^{-\eta_1 x_2} \\
& - \sum_{j=0}^{k_1} \left(\frac{\eta_1}{\eta_1-\alpha_j} \right)^i A_j e^{-(\eta_1-\alpha_j)x_2} - \sum_{j=0}^{k_2} \left(\frac{\eta_1}{\eta_1-\beta_j} \right)^i B_j e^{-(\eta_1-\beta_j)x_2} \Bigg] \Bigg\}, \quad l = 1, 2, \ldots, k_1
\end{aligned}
\tag{A9}
$$

となり，これらの係数は零でなければならない。

(A6)，(A8) と (A9) 式について，$e^{x_1}, e^{x_2}, e^{x_3}$ を p_1, p_2, p_3 に置き換え，本文で定義した行列とベクトルを使って表現すると，(26) 式，(27) 式になる。

【謝辞】

本論文の部分内容は研究会等で報告した際，澤木勝茂教授（南山大学），鈴木淳生助教（名城大学），八木恭子特別研究員（東京大学）から貴重なコメントを頂いた。審査の際に，2名の匿名のレフェリーおよび編集長の久保田敬一教授(中央大学)の大変有益なコメントと助言により本稿は改善された。本研究は科研費（19530288）の助成を受けた。

【参考文献】

[1] Bertoin, J. (1996), *Lévy Processes*, Cambridge University Press.

[2] Boyarchenko, S. and S. Levendorskiĭ (2002), *Non-Gaussian Merton-Black-Scholes* Theory, World Scientific.

[3] Boyarchenko, S. and S. Levendorskiĭ (2002b), "Perpetual American Options under Lévy Process", *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 40, No. 6.

[4] Boyarchenko, S. and S. Levendorskiĭ(2006), "General Option Exercise Rules, with Application to Embedded Options and Monopolistic Expansion", *The B.E. Journal of Theoretical Economics*, Vol.6, issue 1.

[5] Cont, R., and P. Tankov (2004), *Financial Modelling with Jump Processes*, Chapman & Hall/CRC.

[6] Dotsis, G., D. Psychoyios and R. N. Markellos(2006), " Modeling Greek Equity Prices using Jump Diffusion Processes", *Operational Research, An International Journal*, Vol. 6, No. 2.

[7] Kifer, Y.(2000), " Game Options", *Finance and Stochastics*, Vol. 4, No. 4.

[8] Kou, S. G. (2002), "A Jump-Diffusion Model for Option Pricing", *Management Science*, Vol. 48,No.8.

[9] Kou, S. G. and H. Wang (2004), "Option Pricing Under a Double Exponential Jump Diffusion Model", *Management Science*, Vol. 50, No.9.

[10] Kyprianou, A. E.(2004), " Some Calculations for Israeli Options," *Finance and Stochastics*, Vol. 8.

[11] Kyprianou, A. E., W. Schoutens, and P. Wilmott ed. (2005), *Exotic Options Pricing and Advanced Lévy Models*, John Wiley & Sons.

[12] Mordecki, E. (2002), "Optimal Stopping and Perpetual Options for Lévy Processes", *Finance and Stochastics*, Vol. 6.

[13] Ramezani, C. A. and Y. Zeng(2007), "Maximum Likelihood estimation of the double exponential Jumpdiffusion Process", *Annals of Finance*, Vol. 3.

[14] Sato, K. (1999), *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Cambridge University Press.

[15] Schoutens, W. (2003), *Lévy Processes in Finance: Pricing Financial Derivatives*, John Wiley & Sons.

[16] Yagi, K. and K. Sawaki(2005), " The Valuation and Optimal Strategies of Callable Convertible Bonds", *Pacific Journal of Optimazation*, Vol. 1, No. 2.

[17] 鈴木敦生・澤木勝茂 (2006),「償還条項付き永久アメリカンオプションの価格式について」,『日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌』, 49 巻 .

[18] 董晶輝・飯原慶雄 (2006),「永久イスラエリ・オプションの権利行使条件」,『現代ファイナンス』No. 20.

[19] 八木恭子・澤木勝茂 (2005),「償還条項付き転換社債の評価について」,『経営財務研究』Vol. 23, No. 2.