ID	JJF00254

論文名	跳躍拡散過程での有限回参入退出モデル
	Finite times repeating entry-exit model for a jump-diffusion process
著者名	董昌輝 飯原慶雄
	Jinghui Dong Yoshio Iihara
ページ	2-14

雑誌名	経営財務研究
	Japan Journal of Finance
発行巻号	第28巻第1号
	Vol.28 / No. 1
発行年月	2008年6月
	Jun. 2008
発行者	日本経営財務研究学会
	Japan Finance Association
ISSN	2186-3792

日本経営財務研究学会

論　文

跳躍拡散過程での有限回参入退出モデル

董　晶輝
（東洋大学）
飯原　慶雄
（南山大学名誉教授）

要　旨

本論文では，参入と退出の回数が有限であるときの参入退出モデルについて検討する。幾何ブラウン運動とそれにジャンプを加えた跳躍拡散過程について解を求める。数値例を用いて，参入・退出の回数が参入と退出の閾値およびプロジェクトの価値に及ぼす影響について検証する。

キーワード：リアル・オプション，参入退出モデル，跳躍拡散過程，アーラン分布率

1　はじめに

リアル・オプションの古典であるDixit and Pindyck(1994)では，幾何ブラウン運動での投資決定問題について，退出を考慮しない単純な参入モデルのほかに，参入と退出を無限に繰り返す参入退出モデルが扱われている。単純な参入モデルでは，一旦参入すると，プロジェクトの操業が永久に続くことを仮定し，参入退出モデルでは，状況の変化によって参入と退出を永久に繰り返していくことを仮定している。ここでは，参入と退出の回数が有限であるときの参入退出モデルについて検討する。キャッシュフローの変動が幾何ブラウン運動であると仮定することは，実際のプロジェクトの不確実性を十分に捉えることができない場合もある。キャッシュフローの変動には，連続的ランダムな変化以外に，突発的大幅な変化が生じる場合がある。キャッシュフローの大幅な増加としては，製品に対するブームが起きて，需要が大幅に増加する場合や，技術革新(innovation)によって，生産性が大幅に向上したり，生産コストが大幅に低下したりする場合が考えられる[1]。キャッシュフローの大幅な減少としては，競合製品が開発されたことによって，需要が大幅に落ち込む場合や，原材料の大幅な値上がりによって生産コストが大幅に増大する場合が考えられる。ここでは，こうした動きをモデル化するために，幾何ブラウン運動に跳躍(jump)を加えた跳躍拡散過程(jump-diffusion processes)について，有限回数の参入退出問題を検討する。

1　Farzin, Huisman, and Kort(1998)，Doraszelsky(2004)は技術進歩のプロセスをポアソン過程として捉え，技術革新が生じた後の新技術の採用，および新技術の改良について議論している。

最近では，幾何ブラウン運動に跳躍(jump)を加えたレヴィ過程について，オプション理論の分野でいくつかの成果が得られている。Kou and Wang (2003)はジャンプが2重指数分布（double exponential distribution)の場合の最適停止問題について議論している。さらに，Kou and Wang (2004)とMordecki(2002)はジャンプの分布が2重指数分布の場合について永久アメリカン・オプションの権利行使閾値とオプション価格について明示的な解を示している。また，レヴィ過程のリアル・オプション理論への応用にも進展が見られる。Boyarchenko (2004)は，資本拡張問題について，一般のレヴィ過程での投資実行タイミングについての条件を求め，特に，ジャンプが指数分布する場合については明示的な解を示している。また，Boyarchenko and Levendorskiĭ(2006)はレヴィ過程での一般的なオプションの権利行使ルールについて論じ，リアル・オプションへの応用を取り扱っている。

ジャンプが指数分布する場合は結果を明示的に示すことができ，計算も比較的容易である。しかし，指数分布の最頻値は零であるから，ある程度の大きさのジャンプが起きることが最もありそうだとすると，指数分布を仮定するのはやや問題があるように思われる。そこで，ここでは，指数分布を含むより一般的な分布として，ジャンプ幅の確率分布がアーラン分布に従う場合について検討する。

企業の投資決定問題にリアル・オプション理論を応用するとき，しばしば，退出を考慮しない単純な参入モデルが利用される。しかし，退出のコストが極めて大でなければ，退出を考慮して，参入の閾値やプロジェクトの価値を求めるべきであり，少なくとも，退出を考慮した場合と，考慮しない場合を比較したうえで，どのような政策を採用すべきかを考えるべきである。さらに，状況によっては，退出だけではなく，再参入を考えるべきかもしれない。Dixit and Pindyck(1994)では，無限に参入と退出を繰り返すモデルを示しているが，鉱山や油井などの場合はこうしたモデルは意味があるかもしれないが，一般の製品の場合には，同じタイプの製品が繰り返し永久に使用されるとは考えられない。したがって，参入と退出を永久に繰り返すという仮定が適切でない場合も少なくない。そこで，ここでは，参入と退出がN回繰り返されるモデルを考え，参入と退出の閾値が参入と退出の回数とともにどのように変化するか，また，無限回の参入退出モデルの結果にどのように収束していくかを見てみることにした。このことは，また，参入と退出についてどのような戦略を採用するかによって，最初に参入，あるいは，退出する際の閾値およびプロジェクトの価値がどのように変化するかを示すことにもなる。

跳躍拡散過程で，ジャンプの大きさの分布をアーラン分布とすると，アーラン分布の次数が大になるにつれ，閾値とプロジェクトの価値を決定するために必要な未知数の数が増加し，無限回の参入退出モデルでは，数値的に解を求める時に適切な初期値を与えないと解が得られないことがある。これに対し，有限回モデルでは，最終回の退出の閾値の計算からはじめて，バックワードで順次計算するので，1回に求める未知数は半減し，適切な初期値も容易に求めることができるので，数値計算の面でも，有限回モデルは意味のあるものとなる。

論文は次のように構成される。第2節では，この論文で扱うキャッシュフローのダイナミクス，レヴィ過程，アーラン分布，プロジェクトの価値についてのベルマン方程式，確率変数の微小時間変化率の平均と分散など，以下の議論のために必要な基本的事項を示す。跳躍拡散過程モデルでは閾値とプロジェクトの価値を求めるための式の数も増加し，表現もやや複雑になるので，第3節では，幾何ブラウン運動の場合について考えてみる。ここでは，有限回の参入退出モデルを解くための連立方程式を示すとともに解を数値的に求めるときの式の特性を明らかにする。跳躍拡散過程では，幾何ブラウン運動の場合に対応する方程式の形は複雑なものとなるが，行列表現により，基本的には幾何ブラウン運動の場合と類似のものとして表現できることを第4節で示す。また，解を数値的に求めるための計算法を示す。第

５節では数値例を示す。第６節で結論を述べる。

2　基本的事項

Dixit and Pindyck(1994)は，販売額が確率的に変動するが，それに対するコストは固定的であるモデルについて検討している。ここでは，コストの確率的変動も考慮するために，販売額からコストを引いたものをキャッシュフローと呼び，キャッシュフローが確率的に変動する部分と固定的な部分からなるものとする。すなわち，確率的に変動する部分をX_tで表し，固定的な部分を$-X_c$とし，時刻tの瞬間キャッシュフローがX_t-X_cで表されるものとする[2]。X_tの確率的変動については，第３節では，Dixit and Pindyckと同様に幾何ブラウン運動であるとする。しかし，キャッシュフローの変動には技術革新による生産コストの大幅な低下，当該製品に対する爆発的な需要の増加による販売額の突然の増加，原材料の価格の突然の大幅な上昇による生産コスト増，競合製品の開発成功による需要の大幅な減少など，幾何ブラウン運動では適切に表すことができないものが多い。そこで，第４節では，X_tの小幅な変化はブラウン運動に従って生じ，X_tの大幅な増加と減少はそれぞれ相互に独立なポアソン過程に従って発生するような確率過程を考察する。大幅な増加はパラメータλ_1のポアソン過程で発生し，大幅な減少はパラメータλ_2のポアソン過程で発生する。X_tの大幅な増加が発生すると，X_tはY_1X_t ($Y_1>1$)になり，X_tの大幅な減少が発生すると，X_tはY_2X_t ($Y_2<1$)になるものとし，X_tは無限小生成作用素（infinitesimal generator）が次のような形で表される跳躍拡散過程(jump-diffusion process)であるとする[3]。

$$\mathcal{L}U(x)=\frac{1}{2}\sigma^2x^2U''(x)+\mu xU'(x)+\lambda_1\{E[U(xY_1)]-U(x)\}+\lambda_2\{E[U(xY_2)]-U(x)\} \tag{1}$$

μと$\sigma(>0)$は幾何ブラウン運動のドリフトとボラティリティである。

ここでの確率過程は一般にレヴィ過程と呼ばれるものに属する。レヴィ過程の特質として，$E[X_t^z|X_0=1]=\exp[\Psi(z)t]$となる$\Psi(z)$が存在することが示されている[4]。$\Psi(z)$はレヴィ冪指数(Levy exponent)と呼ばれる。(1)式の場合，レヴィ指数は，関数$U(x)=x^z$に，無限小生成作用素を適用することにより，

$$\mathcal{L}x^z=\left\{\frac{1}{2}\sigma^2z(z-1)+\mu z+\lambda_1[E(Y_1{}^z)-1]+\lambda_2[E(Y_2{}^z)-1]\right\}x^z=\Psi(z)x^z$$

2　ここでは，確率変数X_tは非負であるので，キャッシュフローが負になる可能性を考慮するために固定的な部分を導入した。Xcは，具体的には，固定的なコストと考えてよい。

3　詳細についてはBoyarchenko (2004)，Boyarchenko and Levendorskiĭ (2002,2006)，Kou and Wang (2003,2004)，Mordecki(1999,2002)を参照。

4　Bertoin (1996)，Sato (1999)を参照。これらの文献では$x_t=\log X_t$についての確率過程が述べてある。ここでは，これまでの幾何ブラウン運動のもとでのオプション理論やリアル・オプション理論との整合性を考えて，X_tがレヴィ過程であるとして，$X_t=\exp(x_t)$を使用した表現を採用した。

であることが分かる[5]。Y_i の確率分布として，ここでは，$y_1=\log Y_1$ と $y_2=-\log Y_2$ の確率密度関数が

$$f_i(y)=\frac{\eta_i(\eta_i y)^{k_i-1}e^{-\eta_i y}}{(k_i-1)} \qquad (i=1,2)$$

で表されるアーラン分布に従う場合について検討する。ここで，$\eta_1>1$, $\eta_2>0$ で，k_1, k_2 は非負の整数である。この場合，レヴィ冪指数は

$$\Psi(z)=\frac{1}{2}\sigma^2 z(z-1)+\mu z+\lambda_1\left[\left(\frac{\eta_1}{\eta_1-z}\right)^{k_1}-1\right]+\lambda_2\left[\left(\frac{\eta_2}{\eta_2+z}\right)^{k_2}-1\right]$$

となる。方程式 $\Psi(z)=r$ $(r>0)$ は，複素根を含め，実数部が正の根が k_1+1 個，実数部が負の根が k_2+1 個存在するので，これらの根を α_i $(i=0,1,2,\cdots,k_1)$，β_j $(j=0,1,2,\cdots,k_2)$ とする。幾何ブラウン運動の場合（$\lambda_1=\lambda_2=0$）には α と β の添え字は省略することにする。

プロジェクトを実行して生産を永久に継続する場合のキャッシュフローの現在価値は，割引率 r (>0) を一定とすると，

$$E\left[\int_0^\infty (X_t-X_c)e^{-rt}dt \mid X_0=x\right]=\frac{x}{r-\Psi(1)}-\frac{X_c}{r}$$

となる。以下では，キャッシュフローの現在価値が有限な値になるように，$r>\Psi(1)$ と仮定する[6]。また，$1/[r-\Psi(1)]$ を c で表し，以下では，上の式の右辺を $cx-X_c/r$ と表すことにする。この論文では割引率は一定と仮定する。幾何ブラウン運動のときには，$\Psi(1)=\mu$ となる。

プロジェクトに参入していない（退出している）状態にあり，次の参入が n 回目の参入であるとき，X_t の値が x のときのプロジェクト価値を $V_n(x)$，プロジェクトに参入しており，次の退出が n 回目の退出であるときのプロジェクト価値を $W_n(x)$ とする。参入の閾値を x_n，退出の閾値を y_n とすると，プロジェクト価値についてのベルマン方程式は $x<x_n$ では

$$\mathcal{L}V_n(x)-rV_n(x)=0$$

となり，$x>y_n$ では

$$\mathcal{L}W_n(x)+(x-X_c)-rW_n(x)=0$$

5 Boyarchenko and Levendorskiĭ (2006) 参照。

6 リスク中立な場合は無リスクな利子率が $\Psi(1)$ に等しいので，この仮定はリスクを考慮した割引率 r が無リスクな利子率より大きいことを意味する。

となる。

確率変数 X_t の微小変化率の平均と分散は

$$E\left[\frac{dX_t}{X_t}\right] = \{\mu + \lambda_1 E[Y_1 - 1] + \lambda_2 E[Y_2 - 1]\}dt = \Psi(1)dt$$

$$Var\left[\frac{dX_t}{X_t}\right] = \{\sigma^2 + \lambda_1 E[(Y_1 - 1)^2] + \lambda_2 E[(Y_2 - 1)^2]\}dt = [\Psi(2) - 2\Psi(1)]dt$$

となる[7]。

3 幾何ブラウン運動の場合

確率変数 X_t が幾何ブラウン運動の場合には，$x=0$ のときには $V_n(x)$ は零になり，x が大になると，$W_n(x)$ が $cx - X_c/r$ に近づくという境界条件から，ベルマン方程式の解は

$$V_n(x) = A_n x^{\alpha}$$
$$W_n(x) = B_n x^{\beta} + cx - X_c/r$$

となる。α と β は方程式

$$\frac{1}{2}\sigma^2 z(z-1) + \mu z - r = 0$$

の実根で，$\alpha>1$，$\beta<0$ である。n 回目の参入のコストを I_n，退出によって得られる金額を E_n とすると，参入と退出の時点での価値対等条件 (value matching condition) から次の方程式が得られる。

$$A_n {x_n}^{\alpha} = B_n {x_n}^{\beta} + cx_n - \frac{X_c}{r} - I_n$$

$$B_n {y_n}^{\beta} + cy_n - \frac{X_c}{r} = A_{n+1} {y_n}^{\alpha} + E_n$$

以下では，$X_c/r + I_n$ を $K_I(n)$，$X_c/r + E_n$ を $K_E(n)$ で表すことにする。退出によって得られる金額 E_n が最低のキャッシュフローの現在価値 $- X_c/r$ より大でなければ退出は生じないので，$K_E(n)>0$ であると仮定する。X_c，E_n の符号は正負いずれでも良い。参入直後に退出することで利益が生じたり，退出直後に参入することで利益が生じたりする裁定機会を排除するため，$I_n>E_n$，$E_n<I_{n+1}$，すなわち，$K_I(n)>K_E(n)$, $K_E(n)<K_I(n+1)$ であると仮定する。I_n の符号は正負いずれでも良い。$K_I(n)$ と $K_E(n)$ を使用すると上の価値対等条件は

$$A_n {x_n}^{\alpha} = B_n {x_n}^{\beta} + cx_n - K_I(n) \tag{2}$$

7 Dixit and Pindyck(1994, p.168) と同様の方法でこれらの結果を求めた。

$$B_n y_n{}^{\beta} + cy_n - K_E(n) = A_{n+1} y_n{}^{\alpha} \tag{3}$$

と表され，対応する滑らかな張り合わせ条件 (smooth pasting condition) は

$$\alpha A_n x_n{}^{\alpha} = \beta B_n x_n{}^{\beta} + cx_n \tag{4}$$

$$\beta B_n y_n{}^{\beta} + cy_n = \alpha A_{n+1} y_n{}^{\alpha} \tag{5}$$

となる。参入と退出の総回数を N とすると，n=N では，(3) 式と (5) 式で，A_{N+1}=0 として y_N と B_N を求め，その B_N を使って，(2) 式と (4) 式から x_N と A_N を求める。以下，順次に n=N − 1,⋯,1 について計算する。

上の計算で x_n と y_n を求めることは，それぞれ，

$$F_n(z) = \alpha\left(B_n z^{\beta} + cx - K_I(n)\right) - \left(\beta B_n z^{\beta} + cz\right) = 0 \tag{6}$$

$$G_n(z) = \beta(A_{n+1} z^{\alpha} - cz + K_E(n)) - (\alpha A_{n+1} z^{\alpha} - cz) = 0 \tag{7}$$

を満たす z を求めることと同値である。z>0 では，$F_n(x)$ は凸で，$G_n(z)$ は凹であり，

$$F_n(y_n) = \alpha[K_E(n) - K_I(n)] < 0, \qquad G_n(x_{n+1}) = \beta[K_E(n) - K_I(n+1)] > 0$$

であるから，(6) 式を満たす z は 2 個存在し，一つは y_n より小で，他は y_n より大である。同様に，(7) 式を満たす z は 2 個存在し，一つは x_{n+1} より小で，他は x_{n+1} より大である。前者では y_n より大きな z が，後者では x_{n+1} より小さな z が求める解である。

4　跳躍拡散過程の場合

確率変数 X_t がジャンプを含む跳躍拡散過程の場合には，ベルマン方程式の解

$$V_n(x) = \sum_{j=0}^{k_1} A_{j,n} x^{\alpha_j}\ , \qquad W_n(x) = \sum_{j=0}^{k_2} B_{j,n} x^{\beta_j} + cx - \frac{X_c}{r}$$

は，参入と退出の閾値 x_n と y_n について，次の条件を満足しなければならない[8]。

$$-\sum_{j=0}^{k_1}\left(\frac{\eta_1}{\eta_1 - \alpha_j}\right)^i A_{j,n} x_n{}^{\alpha_j} + \sum_{j=0}^{k_2}\left(\frac{\eta_1}{\eta_1 - \beta_j}\right)^i B_{j,n} x_n{}^{\beta_j} + \left(\frac{\eta_1}{\eta_1 - 1}\right)^i cx_n - K_I(n) = 0, \quad i = 0,1,2,\dots,k_1 \tag{8}$$

8　導出の詳細については，董・飯原 (2008) を参照。

$$\sum_{j=0}^{k_1}\left(\frac{\eta_2}{\eta_2+\alpha_j}\right)^i A_{j,n+1}{y_n}^{\alpha_j}-\sum_{j=0}^{k_2}\left(\frac{\eta_2}{\eta_2+\beta_j}\right)^i B_{j,n}{y_n}^{\beta_j}-\left(\frac{\eta_2}{\eta_2+1}\right)^i cy_n+K_E(n)=0,\ \ i=0,1,2,\dots,k_2 \tag{9}$$

以下では，表現を簡潔にするため，行列表記を使用する。記号は表1の通りである。$\mathbf{C}_{1\alpha}$, $\mathbf{C}_{1\beta}$, $\mathbf{C}_{2\alpha}$, $\mathbf{C}_{2\beta}$ は行列で，他はベクトルである。j の範囲は0から k_1 または k_2 で，A と α の添え字については k_1，B と β の添え字については k_2 である。また，行列またはベクトルの添え字が1のときは i の範囲は0から k_1，添え字が2のときは0から k_2 である。$\mathbf{1}_1$，$\mathbf{1}_2$ は1を要素とする k_1+1 次と k_2+1 次のベクトルである。

表1　行列とベクトルの定義

記号	要素	記号	要素
$\mathbf{C}_{1\alpha}$	$(\eta_1/(\eta_1-\alpha_j))^i$	$\mathbf{C}_{2\alpha}$	$(\eta_2/(\eta_2+\alpha_j))^i$
$\mathbf{C}_{1\beta}$	$(\eta_1/(\eta_1-\beta_j))^i$	$\mathbf{C}_{2\beta}$	$(\eta_2/(\eta_2+\beta_j))^i$
$\mathbf{d}_1$	$(\eta_1/(\eta_1-1))^i$	$\mathbf{d}_2$	$(\eta_2/(\eta_2+1))^i$
$\mathbf{a_n(x)}$	$A_{j,n}x^{\alpha j}$	$\mathbf{b_n(x)}$	$B_{j,n}x^{\beta j}$
$\boldsymbol{\alpha}$	α_j	$\boldsymbol{\beta}$	β_j
$\mathbf{1}_1$	1	$\mathbf{1}_2$	1

これらの記号を使用すると，(8) 式は，

$$\mathbf{C}_{1\alpha}\mathbf{a}_n(x_n)=\mathbf{C}_{1\beta}\mathbf{b}_n(x_n)+\mathbf{d}_1cx_n-\mathbf{1}_1K_I(n) \tag{10}$$

と表され，滑らかな張り合わせ条件は

$$\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{a}_n(x_n)=\boldsymbol{\beta}'\mathbf{b}_n(x_n)+cx_n \tag{11}$$

と表される。また，退出時点についての式は

$$\mathbf{C}_{2\beta}\mathbf{b}_n(y_n)+\mathbf{d}_2cy_n-\mathbf{1}_2K_E(n)=\mathbf{C}_{2\alpha}\mathbf{a}_{n+1}(y_n), \tag{12}$$

$$\boldsymbol{\beta}'\mathbf{b}_n(y_n)+cy_n=\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{a}_{n+1}(y_n) \tag{13}$$

と表される。跳躍拡散過程では，幾何ブラウン運動での (6), (7) 式に対応する式は

$$F_n(z)=\boldsymbol{\alpha}'{\mathbf{C}_{1\alpha}}^{-1}[\mathbf{C}_{1\beta}\mathbf{b}_n(z)+\mathbf{d}_1cz-\mathbf{1}_1K_I(n)]-[\boldsymbol{\beta}'\mathbf{b}_n(z)+cz]=0 \tag{14}$$

$$G_n(z)=\boldsymbol{\beta}'{\mathbf{C}_{2\beta}}^{-1}[\mathbf{C}_{2\alpha}\mathbf{a}_{n+1}(z)-\mathbf{d}_2cz+\mathbf{1}_2K_E(n)]-[\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{a}_{n+1}(z)-cz]=0 \tag{15}$$

となる。(15) 式を満たす z のうち，x_{n+1} より小さいものが求める y_n であり，(14) 式を満たす z のうち y_n より大きいものが求める x_n である。解を求める計算は幾何ブラウン運動の場合と同様に n=N か

ら順次計算される。$A_{j,n}$ (j = 0, 1, ⋯, k_1) を要素とするベクトルを $\mathbf{A}_n$, $B_{j,n}$ (j= 0, 1, ⋯, k_2) を要素とするベクトルを $\mathbf{B}_n$ とすると，$\mathbf{A}_{N+1}$=0 から $\mathbf{a}_{N+1}$=0 となり，(15) 式から，y_N を求めることができる。y_N が求まると，(12) 式から $\mathbf{b}_N(y_N)$ が求まり，これから，$\mathbf{B}_N$ を求め，(14) 式から x_N を求めるといった順序で，以下，順次，解を求めることができる。(15) 式を解いた上で，(12) 式から $\mathbf{b}_n(y_n)$ を求める代わりに，

$$\mathbf{b}_n(z) = \mathbf{C}_{2\beta}{}^{-1}[\mathbf{C}_{2\alpha}\mathbf{a}_{n+1}(z) - \mathbf{d}_2 cz + \mathbf{1}_2 K_E(n)]$$
$$\boldsymbol{\beta}'\mathbf{b}_n(z) + cz = \boldsymbol{\alpha}'\mathbf{a}_{n+1}(z)$$

を満たす z を求めてやれば，y_n と $\mathbf{b}_n(y_n)$ を同時に求めることができる。x_n と $\mathbf{a}_n(x_n)$ についても同様に

$$\mathbf{a}_n(z) = \mathbf{C}_{1\alpha}{}^{-1}[\mathbf{C}_{1\beta}\mathbf{b}_n(z) + \mathbf{d}_1 cz - \mathbf{1}_1 K_I(n)]$$
$$\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{a}_n(z) = \boldsymbol{\beta}'\mathbf{b}_n(z) + cz$$

を満たす z を求めればよい。この式で，$\mathbf{b}_n(z)$=0 として，z を求めると，それが，退出を考慮しない単純な参入問題の解になる。

5 数 値 例

最初に幾何ブラウン運動について，参入退出の回数ごとの参入退出の閾値とプロジェクトの価値を求めてみる。μ=0, σ=0.4, r=0.04 とすると，方程式 Ψ(z)=r の根は α =1.366, β = − 0.366 となる。X_c, I, E は参入退出の回数と関係なく一定であるとして，X_c=8, I=200, E= − 20，すなわち，K_I=400, K_E=180 とする。横軸に参入退出の回数をとり，参入退出の総回数 N を 5 としたときの毎回の参入退出の閾値を示したものが図 1 である。参考までに，退出を考慮しない単純な参入モデルの参入の閾値を 6 回目の参入回数のところに示した。参入退出の最初の回数では，閾値はほとんど回数に依存しないが，最後の回 (5 回目) では参入の閾値は上昇し，退出の閾値は低下する。これらに比較して，退出を考慮しない単純な参入モデルでの参入の閾値はかなり高くなる。N=5 の場合には，最初の参入退出の閾値は無限回の参入退出モデルのそれとほとんど差はない。N=4 の場合は，図 1 のグラフで 1 回目の参入退出の部分を無視し，横軸の 2, 3, 4, 5, 6, を 1, 2, 3, 4, 5 と読み替えると，この場合の閾値となる。したがって，図 1 は参入退出の総回数 N が変化するときの 1 回目の参入と退出の閾値を示すグラフと考えることもできる。この場合，横軸は参入退出の総回数となり，1, 2, 3, 4, 5, 6 は 5, 4, 3, 2, 1, 0 と読み替えることになる。このように見たとき，将来の退出を考慮しない参入の閾値が，退出を考慮した場合に比較して，かなり高くなることに気づく。このことは，リアルオプション・モデルでは，待ちのオプション価値が強調される傾向があるが，将来の戦略について，適切なシナリオを描かないと，過度の待ちになる危険があることを示唆する。最初の参入と退出の閾値は，3 回以上の参入退出を考えると，無限に繰り返す参入退出モデルでの閾値とほとんど等しくなる。

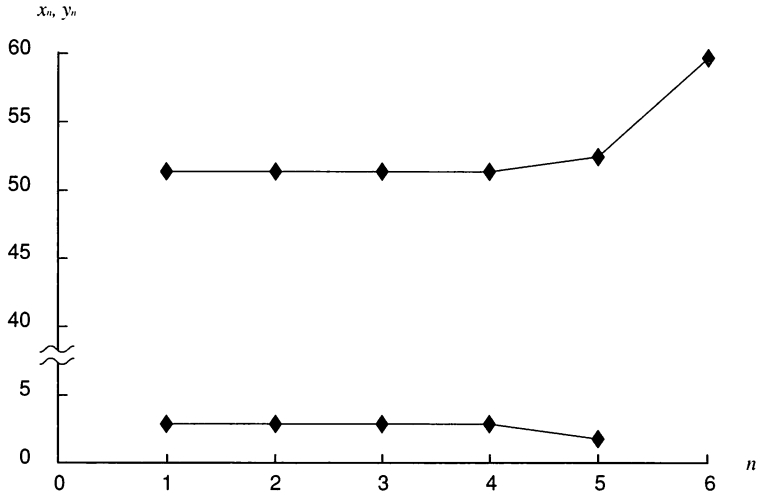

図1　幾何ブラウン運動での参入と退出の閾値

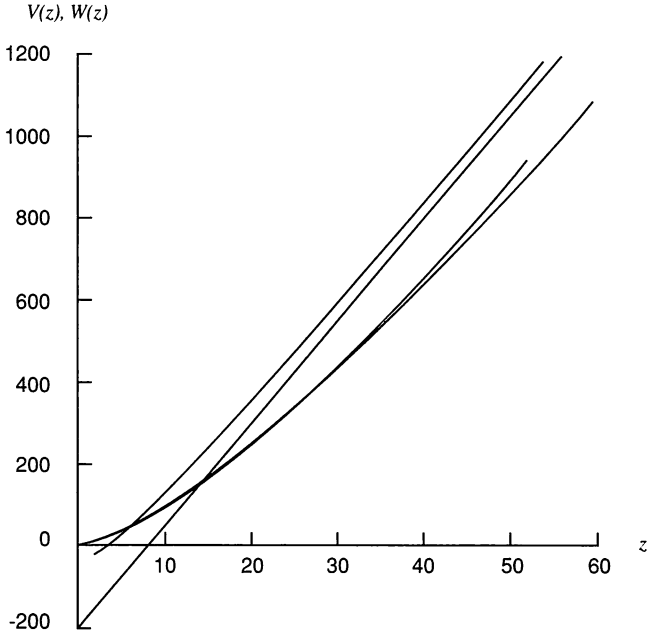

図2　幾何ブラウン運動でのプロジェクトの価値

確率変数の値が z のとき，n 回目の参入前のプロジェクト価値 $V_n(z)$ と，参入後のプロジェクト価値 $W_n(z)$ は

$$V_n(z) = A_n z^{\alpha}, \qquad W_n(z) = B_n z^{\beta} + cz + X_c/r$$

である。1回だけ退出することを考慮したときのプロジェクト価値を図2に示した。グラフの右側で，下から2番目の曲線が最初の参入前のプロジェクト価値を示し，右側で一番上になる線が1回目の参入後のプロジェクト価値を示す。右側で一番下になる曲線は2回目の参入前のプロジェクト価値（退出を考慮しない参入前プロジェクト価値）を示し，右側で上から2番目の直線は2回目の参入後のプロジェクト価値（退出を考慮しない参入後プロジェクト価値）を示す。退出を考慮することによりプロジェクト価値は増加するが，その差は，参入の閾値の差ほどではない。2回以上参入と退出を繰り返す場合の最初の参入前後のプロジェクト価値は，図2の上では1回だけ退出するときの線に重なってしまう。

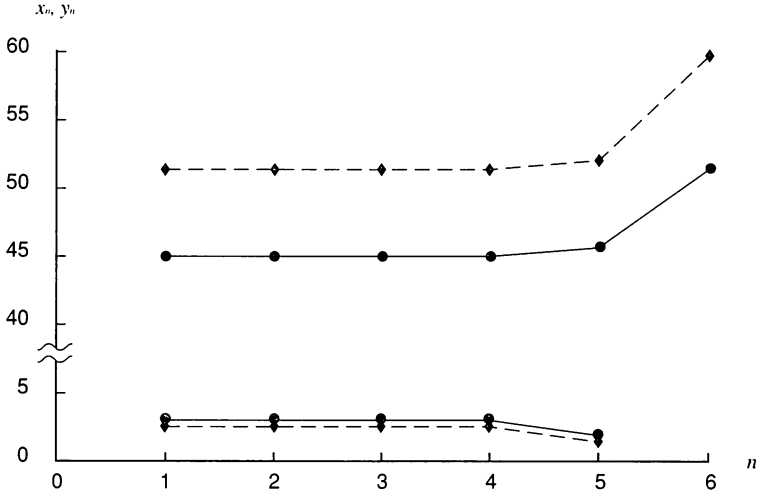

図3　跳躍拡散過程での参入と退出の閾値（実線）

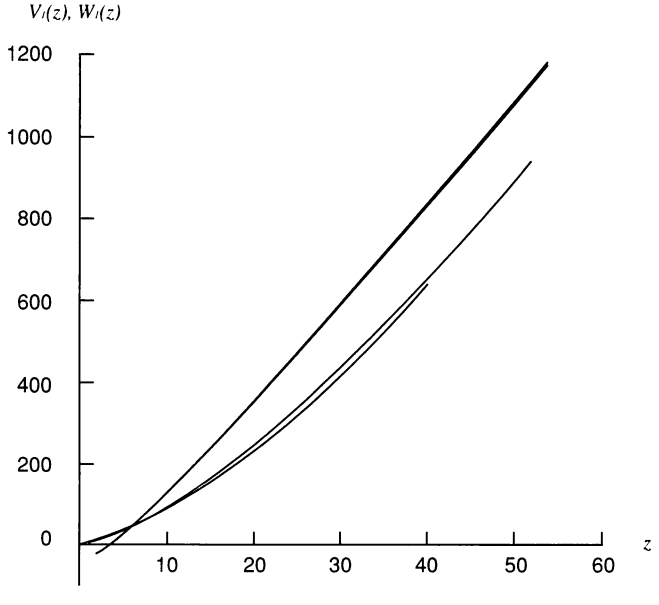

図4　プロジェクトの価値の比較

次に，$k_1=k_2=1$ のときの跳躍拡散過程，すなわち，２重指数過程 (double exponential process) の場合の数値例を示す。$\lambda_1=\lambda_2=0.5$, $\eta_1=\eta_2=5$ とし，確率変数の微小時間変化率の平均と分散が幾何ブラウン運動の例と等しくなるように $\mu=-0.0417$, $\sigma=0.2299$ とした。この場合，方程式 $\Psi(z)=r$ の根は，$\alpha_0=1.3888$, $\alpha_1=8.9250$, $\beta_0=-0.4170$, $\beta_1=-7.3201$ となる。K_I と K_E は幾何ブラウン運動の場合と同じ値を使用した。先の幾何ブラウン運動の場合と比較しやすいように，跳躍拡散過程での参入と退出の閾値を幾何ブラウン運動の場合のそれとともに示したものが図３である。参入の閾値はある程度低下するが，退出の閾値の増加はわずかである。

プロジェクトの価値は，$(z/x)^{\alpha_j}$ $(j=0,1,\cdots,k_1)$ を要素とする列ベクトルを $\mathbf{q}_\alpha(x)$, $(z/x)^{\beta_j}$ $(j=0,1,\cdots,k_2)$ を要素とする列ベクトルを $\mathbf{q}_\beta(x)$ とすると

$$V_n(z)=\mathbf{q}_\alpha(x_n)'\mathbf{a}_n(x_n), \qquad W_n(z)=\mathbf{q}_\beta(y_n)'\mathbf{b}_n(y_n)+cz-X_c/r$$

となる。退出を考慮しないときと，退出を考慮したときのプロジェクトの価値のグラフは幾何ブラウン運動の場合ときわめて類似したものになった。1回だけ退出することとした時の，最初の参入前と後のプロジェクト価値を幾何ブラウン運動の場合と跳躍拡散過程の場合について示したのが図４である。幾何ブラウン運動と跳躍拡散過程では，参入退出の閾値は異なるが，プロジェクトの価値にはほとんど差が生じない。ここでの数値例では，幾何ブラウン運動の代わりに跳躍拡散過程を考えても，確率変数の微小時間変化率の平均と分散が等しくなるようにパラメータの値を設定する限り，参入の閾値はいくらか小さくはなるが，プロジェクトの値はほとんど変わらないという結果になった。したがって，確率変数の平均，分散を適切に求めることができれば，将来の退出，再参入についてのシナリオをどのように描くかということが，確率過程がどのようなものであるかを考えることよりも重要であることを示唆しているように思われる。

6 結　論

本論文では，参入と退出を有限回繰り返す場合の参入退出モデルについて検討した。一度参入したならば永久に操業を継続すると仮定する参入モデルや，参入と退出を永久に繰り返す参入退出モデルについては，これまでに多くの先行研究で議論されてきたが，ここで検討したような有限回数の参入退出問題に関する文献は見当たらない。本論文はこの空白を埋めるものである。

有限回数の参入退出モデルでは，将来の参入と退出についてどのような戦略を採用するかによって，最初の参入と退出の閾値およびプロジェクトの価値がどのように変化するかを示すことができる。参入，退出の回数が進むにつれ，参入の閾値は上昇し，退出の閾値は低下する。そして，かなり速い速度で無限回の参入退出モデルの閾値に接近する。これらの性質は幾何ブラウン運動については一般的に成立することを確かめることができた。跳躍拡散過程については，いくつかの数値例よってこれらのことを確かめることができたが，それが一般的に成り立つことを確認することは今後の課題である。

跳躍拡散過程については，解を数値的に求めるための条件式が複雑な形になり，取り扱いにくい感があったが，行列表現により幾何ブラウン運動との関係が明らかになるとともに，Excel などの表計算ソフトの行列関数を利用して簡単に計算できるようになった。また，有限回の参入退出モデルの場合，計算式の構造も明らかになった。有限回の参入退出モデルの解を数値的に求める際に，中核的な役割を果

たす式 [(14), (15) 式] について，数値例については実際にグラフを描くことにより，幾何ブラウン運動の場合の式 [(6), (7) 式] と同様の性質をもつことを確かめることはできたが，一般的にこれらの性質があることを確認することはできていない。これは今後の課題である。

ここで取り上げた数値例では，参入と退出についてどのような戦略を採用するか，また，確率過程としてどのようなものを考えるかにより，参入退出の閾値，プロジェクトの価値がどのように変化するかを見た。全体的に見て，参入退出の閾値は，戦略および確率過程により変化するが，プロジェクトの価値はそれに対しそれほど変化しない。また，確率過程についての仮定の効果は，確率変数の微小時間変化率の平均と分散を一定とすると，戦略についての仮定に比較して小さいということになった。これらの性質がより一般的に成立するかについて，多くの数値例を使って確かめるのも今後の課題である。

【謝辞】

本論文の一部分は日本経営財務研究学会第 31 回全国大会および南山大学の研究会で報告した。その際，斎藤進教授（上智大学）および澤木勝茂教授（南山大学）から貴重なコメントを頂いた。

【参考文献】

[1] Bertoin, J. (1996), *Levy Processes*, Cambridge University Press.

[2] Boyarchenko, S. (2004), "Irreversible Decisions and Record-Setting News Principles", *The American Economic Review*, Vol. 94, No. 3.

[3] Boyarchenko, S. and S. Levendorskiĭ(2002), "Perpetual American Options under Levy Process", *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 40.

[4] Boyarchenko, S. and S. Levendorskiĭ(2006), "General Option Exercise Rules with Application to Embedded Options and Monopolistic Expansion", *The B. E. Journal of Theoretical Economics*, Vol. 6, No. 1.

[5] Dixit, A. K., and R. S. Pindyck (1994), *Investment under Uncertainty*, Princeton University.（『川口有一郎等訳 (2002)，投資決定理論とリアルオプション』，エコノミスト社。）

[6] Doraszelsky, U. (2004), "Innovations, Improvements, and the Optimal Adoption of New Technologies", *Journal of Economic Dynamics & Control*, Vol. 28.

[7] Farzin, Y. H., K. J. M. Huisman, and P. M. Kort (1998), "Optimal Timing of Technology Adoption", *Journal of Economic Dynamics & Control*, Vol. 22.

[8] Kou, S. G. and H. Wang (2003), "First Passage Times of a Jump Diffusion Process", *Adv. Appl. Prob.* Vol. 35, pp. 504-531.

[9] Kou, S. G. and H. Wang (2004), "Option Pricing Under a Double Exponential Jump Diffusion Model", *Management Science*, Vol. 50, No. 9, pp. 1178-1192.

[10] McDonald, R., and D. Siegel (1986), "The Value of Waiting to Invest", *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 101.

[11] Merton, R. C. (1976), "Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous", *Journal of Financial Economics*, Vol. 3.

[12] Mordecki, E. (2002), "Optimal Stopping and Perpetual Options for Levy Processes", *Applied Mathematics and Optimization*, Vol. 35.

[13] Pindyck, R. (1988), "Irreversible Investment, Capacity Choice, and the Value of the Firm", *American Economic Review*, Vol. 78.

[14] Sato, K. (1999), *Levy Process and Infinitely Divisible Distributions*, Cambridge University Press.

[15] 董晶輝・飯原慶雄 (2008),「跳躍拡散過程での投資決定」,『リアルオプション研究』, 第 1 巻.