| | |
|---|---|
| ID | JJF00225 |


| | |
|---|---|
| 論文名 | 償還条項付き転換社債の評価について |
| | The valuation of callable convertible bonds |
| 著者名 | 八木恭子<br>澤木勝茂 |
| | Kyoko Yagi<br>Katsushige Sawaki |
| ページ | 68-84 |


| | |
|---|---|
| 雑誌名 | 経営財務研究 |
| | Japan Journal of Finance |
| 発行巻号 | 第23巻第2号 |
| | Vol.23 / No. 2 |
| 発行年月 | 2005年4月 |
| | Apr. 2005 |
| 発行者 | 日本経営財務研究学会 |
| | Japan Finance Association |
| ISSN | 2186-3792 |

■論　文

# 償還条項付き転換社債の評価について

八木　恭子
（南山大学大学院 数理情報研究科）

澤木　勝茂
（南山大学 数理情報学部）

要　旨

本論文では，Brennan and Schwartz(1977,1980) で示された企業価値の上に書かれた償還条項付き転換社債を，投資家も企業も共に権利を行使するオプションが付与された条件付き請求権であるとみなすことで，Kifer(2000) や澤木・瀬古 (2003) で示された条件付き請求権に対する資産評価理論を展開する。転換社債には定期的なクーポンの支払いがあり，かつ転換時に受け取る株式にも配当の支払いがあるので，それぞれの支払日において企業価値には不連続なジャンプがおこる。したがって，Kifer(2000) や澤木・瀬古 (2003) の資産評価理論における危険資産に企業価値をそのまま適用することは不適切である。

本論文では，配当やクーポンの支払日における企業価値の不連続なジャンプを許す確率過程を，新たな取引可能な資産価値の確率過程に変換することによって資産評価理論を展開する。そして，転換社債の価値が投資家に転換権を与えることでより高く評価され，企業に償還権を与えることでより低く評価されることを論証する。さらに二項モデルに基づく数値計算を通して，転換社債の価値の評価式と最適政策を視覚的，数値的に実現する。

**キーワード：転換社債，償還条項，配当，クーポン，二項モデル**

## 1　はじめに

償還条項付き転換社債とは，投資家（買い手）に満期までの任意の時刻で転換社債を株式に転換できる権利を与え，さらに企業（売り手）にも満期までの任意の時刻で転換社債を償還できる権利を与えた条件付き請求権である。ただし，企業が償還をした際，投資家はその時刻で転換社債を株式へ転換するか，企業に償還価格で買い戻されるかを選択することができる。また，この転換社債には定期的にクーポンの支払いがあり，さらに転換時に受け取る株式には配当の支払いがある。

過去の転換社債に対する研究として Brennan and Schwartz(1977,1980) は，転換社債の評価モデルを定式化し，有限差分法に基づく数値計算によって転換社債の価値を求めている。しかし，転換社債の価値の解析的な分析はおこなっていない。また，Epstein, Haber and Wilmott(2000) や Kariya and Tsuda(2000), Greiner, Kalay and Kato(2002) などは，転換社債の実証的研究を中心におこない，解析的な分析に主眼を置いていない。さらに Greiner, Kalay and Kato(2002) は，1982 ～ 1992 年において

※ 本研究に対して，平成16年度科学研究費補助金（萌芽研究）（課題番号:16651090）の助成を受けた。

日本で取引された 1357 の転換社債のデータの解析をおこなっている。この論文では，転換社債のプレミアムに関する内容を論じている。この場合のプレミアムとは，転換社債の現在価値と株式へ転換をした場合の価値との差額を示し，ここで扱っている転換社債は負のプレミアムを持つものが多く，裁定が存在していたことを示している。

本論文では，Brennan and Schwartz(1977,1980) で示された企業価値の上に書かれた償還条項付き転換社債を，投資家も企業も共に権利を行使するオプションが付与された条件付き請求権であるとみなすことで，Kifer(2000) や澤木・瀬古 (2003) で示された条件付き請求権に対する資産評価理論を展開する ( 澤木・八木 (2003))。転換社債には定期的なクーポンの支払いがあり，かつ転換時に受け取る株式にも配当の支払いがある。よって，それぞれの支払日において企業価値は不連続なジャンプをする。したがって，Kifer(2000) や澤木・瀬古 (2003) の資産評価理論における危険資産に企業価値をそのまま適用することは不適切である。

そこで，本論文では配当およびクーポンの支払日における企業価値の不連続なジャンプに対して，そのジャンプ分と等価値の企業価値を再投資するような投資戦略をもつポートフォリオを危険資産とみなすことで，資産評価理論を展開する。そして，投資家の最適転換政策および企業の最適償還政策の定性的な性質を明らかにし，転換社債の価値が投資家に転換権を与えることでより高く評価され，企業に償還権を与えることでより低く評価されることを論証する。さらに二項モデルに基づく数値計算を通して，転換社債の価値の評価式と最適政策を視覚的，数値的に実現する。

## 2　償還条項付き転換社債の評価モデルの定式化

本論文では，転換社債と株式のみで資金の調達をしている企業を考える。この企業の時刻$t$での企業価値$V(t)$は

$$V(t) \equiv CB(t, V(t)) + bS^b(t) \tag{1}$$

である。ここで$CB(t, V(t))$ は，満期$T$での額面総額が$F$の転換社債の時刻$t$での総価値であり，$b(>0)$と$S^b(t)$はそれぞれ転換社債が転換される前の株式の発行数と時刻$t$での株価である。同様に転換社債の転換後の時刻$t$での株価を$S^a(t)$とすると企業価値は

$$V(t) = (a(t) + b)S^a(t) \tag{2}$$

となる。ただし，投資家が時刻$t$で転換社債を転換する場合に受け取る株式数$a(t)$は，発行体 ( 企業 ) によって事前に決定された値である。本論文ではすべての転換社債が同時に転換されるモデルを考える。希薄化因子を$z(t) = a(t)/(a(t) + b)$とすると，時刻$t$での転換価値$C(t, V(t))$は

$$C(t, V(t)) = a(t)S^a(t) = z(t)V(t) \tag{3}$$

となる。ここでは，株式には配当の支払日$T_1^d, T_2^d, \cdots, T_N^d(< T)$において企業価値$V(T_j^d)$, $j = 1, 2, \cdots, N$の$\delta$ $(0 \leq \delta < 1)$の割合の配当が支払われるとする。また，時刻$t$で企業が転換社債を償還した場合の償還価格を$CP(t)$とし，転換社債に対するクーポンの支払日$T_1^c, T_2^c, \cdots, T_M^c(< T)$でのその支払額を$i$とする。ただし，配当の支払日とクーポンの支払日が同じ場合には，配当が先に支払われるとする。

$T(< \infty)$を転換社債の満期とし，取引期間を閉区間$[0, T]$とする。危険資産と無危険資産の 2 種類の資産が取引される資産市場を想定する。まず，無危険資産の価格$B(t)$を

$$dB(t) = rB(t)dt,\ B(0) > 0,\ r > 0 \tag{4}$$

で与える。ただし，$r$ は無危険利子率であり定数とする。次に(1)式で与えた企業価値の変動を配当およびクーポンの支払日を除いて，連続的な標本パスをもつ確率微分方程式

$$dV(t) = \mu V(t)dt + \kappa V(t)dZ(t) \tag{5}$$

で与える。ここで，$\mu$と$\kappa$はそれぞれ期待収益率とボラティリティ（定数）をあらわすパラメータであり，確率過程$\{Z(t); 0 \leq t \leq T\}$は確率空間$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$で定義される標準ブラウン運動である。したがって，$\{V(t); 0 \leq t \leq T\}$は幾何ブラウン運動となり，(5)式の解は

$$V(t) = V(0)\exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\kappa^2\right)t + \kappa Z(t)\right\} \tag{6}$$

である。$n[t] = \max\{j; T_j^d < t\}$，$m[t] = \max\{j; T_j^c < t\}$とすると，$n[t]$，$m[t]$はそれぞれ時刻$t$までの配当とクーポンの支払い回数である。このとき，配当およびクーポンの支払いがある企業価値$V^{dc}(t)$は

$$V^{dc}(t) = (1-\delta)^{n[t]}V(0)\exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\kappa^2\right)t + \kappa Z(t)\right\} - \sum_{k=1}^{m[t]} ie^{r(t-T_k^c)} \tag{7}$$

のように書き換えられる。この企業価値は，配当の支払日 $T_j^d, j = 1, 2, \cdots, N$ における支払額$\delta V^{dc}(T_j^d)$のジャンプとクーポンの支払日 $T_j^c, j = 1, 2, \cdots, M$ における支払額$i$のジャンプを含んでいる。また，クーポンの支払いに関しては時刻$T_j^c$で支払われたクーポンを時刻$t$での価値へ変換している。すなわち，(6)式の$V(t)$は実際に取引される企業価値をあらわさなくなる。

ここで新たな取引可能な資産価値$X(t)$を考える。この$X(t)$は，時刻0で企業価値$V^{dc}(0)$にクーポンの支払日において支払われたクーポン分を無危険資産に再投資するような投資戦略をもつポートフォリオの価値である[1]。まず，最初の配当の支払い直前の時刻を $T_1^{d-}$，支払い直後の時刻を$T_1^{d+}$とする。最初の配当の支払い直後に企業価値は，$V^{dc}(T_1^{d+}) = (1-\delta)V^{dc}(T_1^{d-})$ へジャンプする。このとき，ポートフォリオに支払われた配当と等価値の$\delta/(1-\delta)$単位の企業価値を再投資すれば，ポートフォリオは$1/(1-\delta)$単位の企業価値となる。また，クーポンの支払いに対しても同様に最初の支払い直前の時刻を $T_1^{c-}$，支払い直後の時刻を$T_1^{c+}$とすると，最初のクーポンの支払い直後に企業価値は，$V^{dc}(T_1^{c+}) = V^{dc}(T_1^{c-}) - i$へジャンプし，そのときのポートフォリオの価値は，無危険資産に$i$を再投資したものとなる。したがって，時刻$t$までに配当が$n[t]$回およびクーポンが$m[t]$回支払われたときのポートフォリオの価値$X(t)$は

$$\begin{aligned} X(t) &\equiv (1-\delta)^{n[t]}\left\{V^{dc}(t) - \sum_{k=1}^{m[t]} ie^{r(t-T_k^c)}\right\} \\ &= V^{dc}(0)\exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\kappa^2\right)t + \kappa Z(t)\right\} \end{aligned} \tag{8}$$

で与えられる。$V^{dc}(0) = X(0)$より(8)式は

$$X(t) = X(0)\exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\kappa^2\right)t + \kappa Z(t)\right\} \tag{9}$$

であり，その確率微分方程式は

1 Etheridge(2002)pp.126-132 を参照。

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \kappa X(t)dZ(t) \tag{10}$$

で与えられる。

ここで,

$$L(t) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu - r}{\kappa}\right)^2 t - \frac{\mu - r}{\kappa} Z(t)\right\}$$

で定義される$\{L(t); 0 \leq t \leq T\}$はマルチンゲールとなる。条件付き請求権の評価理論において重要な役割を果たすリスク中立確率測度$\tilde{P}$を(10)式の下で$P$に対して

$$\tilde{P}(A) = E[1_A L(T)],\ A \in \mathcal{F}_T \tag{11}$$

と定義する。ギルサノフの定理によって,この測度は一意であり,$X(t)/B(t)$は$\tilde{P}$に関してマルチンゲールとなる[2]。また(10)式は,リスク中立確率測度$\tilde{P}$に関して

$$dX(t) = rX(t)dt + \kappa X(t)d\tilde{Z}(t) \tag{12}$$

と書き換えられる。ただし

$$\tilde{Z}(t) = Z(t) + \frac{\mu - r}{\kappa} t$$

であり,これは$\tilde{P}$の下で標準ブラウン運動である。

時刻$t$における危険資産および無危険資産の保有量をそれぞれ$\alpha(t), \beta(t)$とし,時刻$t$でのポートフォリオ$\pi(t)$を$\pi(t) = (\alpha(t), \beta(t))$とすると,$\pi = \pi(t)$の下での富の過程$W^\pi = \{W^\pi(t), 0 \leq t \leq T\}$は

$$W^\pi(t) = \alpha(t)X(t) + \beta(t)B(t) \tag{13}$$

で与えられる。ここで

$$\int_0^T \alpha^2(t)dt + \int_0^T |\beta(t)|dt < \infty$$

を仮定する (Lamberton and Lapeyre(1996) を参照)。もしポートフォリオ$_\pi$に対して富の過程$W^\pi(t)$が

$$W^\pi(t) = w + \int_0^t \alpha(s)dX(s) + \int_0^t \beta(s)dB(s) \tag{14}$$

を満たすならば,$\pi = \pi(t)$は自己充足的であるという。ただし,$W^\pi(0) = w$である。自己充足的なポートフォリオ$\pi = \pi(t)$に対して

$$e^{-rt}W^\pi(t) = w + \kappa \int_0^t e^{-rs}\alpha(s)X(s)d\tilde{Z}(s) \tag{15}$$

となり,$\tilde{W}^\pi(t) \equiv e^{-rt}W^\pi(t)$は$\tilde{P}$に関してマルチンゲールとなる(澤木・瀬古 (2003) を参照)。

このことはいかなる自己充足的なポートフォリオに対してもそのポートフォリオが生成する富の割引価値(正味現在価値)の期待値は初期の富$w$に等しく,正の現在価値を生み出すことはできないことを示している。この意味でこの資産市場には裁定機会が存在しない。

次にこの資産市場における転換社債の評価について議論する。まず投資家の最適転換政策と企業の最適償還政策をそれぞれ次のように定義する。

2 Karatzas and Shreve(1991) を参照。

**＜最適転換政策＞**

投資家には，任意の時刻で転換社債を株式に転換できる権利が与えられる。投資家は転換社債の価値を最大化するように最適な転換政策を実行する。すなわち，最適な転換政策の下で投資家は

$$CB\left(t,(1-\delta)^{n[t]}X(t)-\sum_{k=1}^{m[t]}ie^{r(t-T_k^c)}\right)>C\left(t,(1-\delta)^{n[t]}X(t)-\sum_{k=1}^{m[t]}ie^{r(t-T_k^c)}\right) \tag{16}$$

ならば，転換社債を転換しないことが最適である。さらに投資家は配当の支払日 $T_j^d, j=1,2,\cdots,N$ において$n[T_j^{d+}]=n[T_j^{d-}]+1$となるので

$$\begin{aligned}&CB\left(T_j^{d+},(1-\delta)^{n[T_j^{d+}]}X(T_j^{d+})-\sum_{k=1}^{m[T_j^{d+}]}ie^{r(T_j^{d+}-T_k^c)}\right)\\&>C\left(T_j^{d-},(1-\delta)^{n[T_j^{d-}]}X(T_j^{d-})-\sum_{k=1}^{m[T_j^{d-}]}ie^{r(T_j^{d-}-T_k^c)}\right)\end{aligned} \tag{17}$$

ならば，時刻$T_j^{d-}$では転換社債を転換しないことが最適である。

**＜最適償還政策＞**

企業には，任意の時刻で転換社債を償還できる権利が与えられる。ただし，企業が償還した際，投資家はその時刻で転換社債を株式へ転換するか，企業に償還価格で買い戻されるかを選択することができる。企業は(1)式の転換社債の価値を最小化するように償還政策を実行することで自社の株式の価値を最大化する。時刻$t$で企業が償還した場合，投資家は転換価値，もしくは償還価格の高い方を受け取る。ゆえに最適な償還政策の下で企業は

$$CB\left(t,(1-\delta)^{n[t]}X(t)-\sum_{k=1}^{m[t]}ie^{r(t-T_k^c)}\right)<\max\left(C\left(t,(1-\delta)^{n[t]}X(t)-\sum_{k=1}^{m[t]}ie^{r(t-T_k^c)}\right),CP(t)\right) \tag{18}$$

ならば転換社債を償還しないことが最適である。しかし，(18)式が成立し企業が償還しない場合でも転換価値が償還価格より高いならば，最適な転換政策を実行する投資家はすぐに転換社債を株式へ転換する。(18)式の下での最適な償還政策は

$$CB\left(t,(1-\delta)^{n[t]}X(t)-\sum_{k=1}^{m[t]}ie^{r(t-T_k^c)}\right)<CP(t) \tag{19}$$

ならば，償還しないことが最適となる。さらに企業はクーポンの支払日 $T_j^c, j=1,2,\cdots,M$ において

$$CB\left(T_j^{c+},(1-\delta)^{n[T_j^{c+}]}X(T_j^{c+})-\sum_{k=1}^{m[T_j^{c+}]}ie^{r(T_j^{c+}-T_k^c)}+i\right)<CP(T_j^{d-}) \tag{20}$$

ならば，時刻$T_j^{c-}$では転換社債を償還しないことが最適である。

以上の最適政策の下で償還条項付き転換社債の評価モデルの定式化をおこなう。まず，企業価値がゼロになる場合，転換社債の価値もゼロになる。すなわち，すべての$t$について

$$CB(t,0)=0 \tag{21}$$

である。次に投資家は区間$[0,T]$の任意の時刻$\tau$で転換し，企業は区間$[0,T]$の任意の時刻$\sigma$で償還すると，転換社債が転換もしくは償還される時刻は$\tau\wedge\sigma=\min(\tau,\sigma)$となる。したがって，企業の投資家への支払い額$R(\sigma,\tau)$は

$$\begin{aligned}R(\sigma,\tau)=&\max\left(C\left(\sigma,(1-\delta)^{n[\sigma]}X(\sigma)-\sum_{k=1}^{m[\sigma]}ie^{r(\sigma-T_k^c)}\right),CP(\sigma)\right)1_{\{\sigma<\tau\}}\\&+C\left(\tau,(1-\delta)^{n[\tau]}X(\tau)-\sum_{k=1}^{m[\tau]}ie^{r(\tau-T_k^c)}\right)1_{\{\tau\le\sigma\}}\end{aligned} \tag{22}$$

となる。ただし，$\tau,\sigma\in[t,T)$であり，$\tau=\sigma$のときは投資家の転換の権利が優先されるとする。また，満期$T$では投資家のみが権利を行使することができるとする。つまり，転換することもでき，額面総額を受け取ることもできる。ただし，企業価値が額面総額以下ならば，企業価値を受け取る。よって

$$\begin{aligned}R(T,T)=\min\Bigg(&(1-\delta)^NX(T)-\sum_{k=1}^{M}ie^{r(T-T_k^c)},\\&\max\left(C\left(T,(1-\delta)^NX(T)-\sum_{k=1}^{M}ie^{r(T-T_k^c)}\right),F\right)\Bigg)\end{aligned} \tag{23}$$

となる。

$\sigma$−加法族$\mathcal{F}_t$に関する投資家が転換もしくは企業が償還する停止時刻の集合を$\mathcal{T}_{t,T}$とする。満期$T$をもつ転換社債に対するヘッジポートフォリオ$\pi$とはすべての$t$に対して確率1で

$$W^\pi(t)\ge R(\sigma,t),\ \forall t\in[0,T] \tag{24}$$

となるような償還時刻$\sigma\in\mathcal{T}_{0,T}$と自己充足的なポートフォリオの組$(\sigma,\pi)$である。転換社債の価値を

$$CB^*(0)\equiv\inf\{CB\ge 0\mid\exists(\sigma,\pi)\text{ with }W^\pi(0)=CB\}$$

で定義する。ただし，$(\sigma,\pi)$はヘッジポートフォリオである。

**定理**　転換社債の価値$CB^*(t)$は

$$\begin{aligned}CB^*(t)&=\operatorname*{ess\,inf}_{\sigma\in\mathcal{T}_{t,T}}\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_{t,T}}\tilde{E}[e^{-r(\tau\wedge\sigma-t)}R(\sigma,\tau)|\mathcal{F}_t]\\&=\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_{t,T}}\operatorname*{ess\,inf}_{\sigma\in\mathcal{T}_{t,T}}\tilde{E}[e^{-r(\tau\wedge\sigma-t)}R(\sigma,\tau)|\mathcal{F}_t]\end{aligned} \tag{25}$$

であり，最適な転換もしくは償還時刻は，それぞれ

$$\hat{\tau}_t=\inf\left\{\tau\in[t,T)\mid CB^*(\tau)=C\left(\tau,(1-\delta)^{n[\tau]}X(\tau)-\sum_{k=1}^{m[\tau]}ie^{r(\tau-T_k^c)}\right)\right\}\wedge T$$

$$\hat{\sigma}_t=\inf\left\{\sigma\in[t,T)\mid CB^*(\sigma)=\max\left(C\left(\sigma,(1-\delta)^{n[\sigma]}X(\sigma)-\sum_{k=1}^{m[\sigma]}ie^{r(\sigma-T_k^c)}\right),CP(\sigma)\right)\right\}\wedge T \tag{26}$$

で与えられる。

証明は，Kifer(2000) で与えられているのでここでは省略する。

次の系はこの定理より直ちに導出される。

**系** すべての$(\sigma,\tau)\in\mathcal{T}_{t,T}\times\mathcal{T}_{t,T}$に対して

$$\tilde{E}[e^{-r(\tau\wedge\hat{\sigma}_t-t)}R(\hat{\sigma}_t,\tau)\mid\mathcal{F}_t]\leq CB^*(t)=\tilde{E}[e^{-r(\hat{\tau}_t\wedge\hat{\sigma}_t-t)}R(\hat{\sigma}_t,\hat{\tau}_t)\mid\mathcal{F}_t]\leq\tilde{E}[e^{-r(\hat{\tau}_t\wedge\sigma-t)}R(\sigma,\hat{\tau}_t)\mid\mathcal{F}_t] \tag{27}$$

が成立する。

(27)式は，投資家が最適な転換時刻で転換するならば，任意の時刻で転換するより転換社債の価値は高くなり，企業が最適な償還時刻で償還するならば，任意の時刻で償還するより転換社債の価値は低くなることをあらわす。すなわち，償還条項付き転換社債の価値は，投資家が任意の時刻で転換する権利がなく，企業が償還した場合にのみ転換が可能である転換社債の価値より高く，償還条項のない転換社債の価値より低いことがわかる。

## 3 数値計算

本節では，二項モデルを用いて転換社債の価値を視覚的に実現する。無危険資産と取引可能な資産からなる完全で効率的な資産市場を想定し，有限な離散時点$k=0,1,\cdots,N_T$において取引されていると仮定する。ただし，$N_T$は離散化させる分割の数である。

時点$k$における無危険資産の価格$B_k$と取引可能な資産価値$X_k$は，それぞれ

$$B_k=(1+r)^kB_0,\ r>0,\ B_0>0 \tag{28}$$

$$\begin{aligned}X_k&=X_{k-1}(1+\rho_k)\\&=X_0\prod_{j=1}^{k}(1+\rho_j)\ X_0=v>0\end{aligned} \tag{29}$$

となる。ただし，$v$は時刻 0 での企業価値であり，$\rho_k$は確率$p$で$u$をとり，確率$1-p$で$d$をとる確率変数である。したがって，時点$k-1$における取引可能な資産価値$X_{k-1}$が与えられたとき，時点$k$における価値は$X_{k-1}(1+u)$に上昇するか，または$X_{k-1}(1+d)$に下降するかのどちらかの値をとる。$u,d$をそれぞれ上昇率，下降率とすると，無裁定条件より

$$-1<d<r<u,\ 0<p<1 \tag{30}$$

が成立しなければならない。さらにリスク中立確率を$\tilde{p}$とすると

$$\tilde{p}=\frac{r-d}{u-d} \tag{31}$$

となり，$\tilde{p}$に関する期待値を$\tilde{E}$であらわす。このとき$\tilde{E}[\rho_k]=r$である。

区間$[0,T]$を$N_T$個に分割したとき，$\Delta t=T/N_T$とし，離散時点$\{k,k+1,\cdots,N_T\}$での停止時刻の集合を$\mathcal{T}_{k,N_T}^{N_T}$とする。この停止時刻の集合の下で(25)式に対応する$CB_{N_T}^*(k)$は

$$
\begin{aligned}
CB^*_{N_T}(k) &= \inf_{\sigma\in\mathcal{T}^{N_T}_{k,N_T}} \sup_{\tau\in\mathcal{T}^{N_T}_{k,N_T}} \tilde{E}[e^{-r(\tau\wedge\sigma-k\Delta t)}R(\sigma,\tau)|\mathcal{F}_k] \\
&= \sup_{\tau\in\mathcal{T}^{N_T}_{k,N_T}} \inf_{\sigma\in\mathcal{T}^{N_T}_{k,N_T}} \tilde{E}[e^{-r(\tau\wedge\sigma-k\Delta t)}R(\sigma,\tau)|\mathcal{F}_k]
\end{aligned} \tag{32}
$$

で与えられる。また，配当の支払い時点を $N^d_j, j=1,2,\cdots,N$，クーポンの支払い時点を $N^c_j$, $j=1,2,\cdots,M$, で与え，時点$k$までの配当の支払い回数を $n[k]=\max\{j;N^d_j<k\}$, 時点$k$までのクーポンの支払い回数を$m[k]=\max\{j;N^c_j<k\}$とする。動的計画法の最適性の原理より$CB^*_{N_T}(k)$は，$k=N_T$のとき$CB^*_{N_T}(k)$となり，$k=N_T$のとき

$$
\begin{aligned}
CB^*_{N_T}(N_T) &= \min\left((1-\delta)^N X_{N_T} - \sum_{j=1}^{M} ie^{r(N_T-N^c_j)},\right. \\
&\qquad \left.\max\left(C\left(N_T,(1-\delta)^N X_{N_T} - \sum_{j=1}^{M} ie^{r(N_T-N^c_j)}\right),F\right)\right)
\end{aligned} \tag{33}
$$

となり，$k=N_T-1,N_T-2,\cdots,0$のとき

$$
\begin{aligned}
&CB^*_{N_T}(k) \\
&= \max\left(C\left(k,(1-\delta)^{n[k]}X_k - \sum_{j=1}^{m[k]} ie^{r(k-N^c_j)}\right), \min\left(CP(k), e^{-r\Delta t}\tilde{E}[CB^*(k+1)\mid\mathcal{F}_k]\right)\right)
\end{aligned}
$$

で与えられる。 (34)

(34)式は，各時点において投資家は転換をするかしないか，その価値を高くする政策を選択し，企業は償還をするかしないか，その価値を低くする政策を選択することを意味する。(33)，(34)式を満期$N_T$から後向きに時点 0 まで計算する。

表 1 では，転換社債の価値を求めるパラメータを示す。

**表 1　転換社債の価値を求めるパラメータ**

| | |
|---|---|
| 時刻0での企業価値$v$ | 100 |
| 額面総額$F$ | 100 |
| 償還価格$CP(t)$ | 100 |
| 希薄化因子$z(t)$ | 0.8 |
| 無危険利子率$r$ | 0.03 |
| ボラティリティ$\kappa$ | 0.2 |
| 満期$T$ | 2 |
| 配当率$\delta$ | 0.2 |
| クーポンの支払額$i$ | 1 |
| 時間と資産の分割数$N_T$ | 4000 |
| 配当の支払い時点$N^d_j$ | $1000j$, $j=1,2,3$(図 1) |
| クーポンの支払い時点$N^c_j$ | $500j, j=1,2,\cdots,7$ (図 1) |

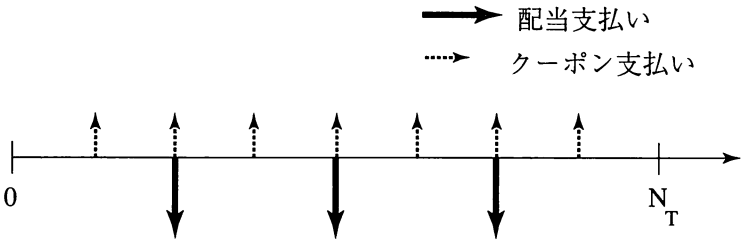


**図1　配当とクーポンの支払い時点**

表1でのパラメータの下で投資家に権利を与える転換のみ可能な転換社債，償還条項付き転換社債，企業に権利を与える償還のみ可能な転換社債の価値を表2で示す。

**表2　表1の下での転換社債の価値**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 転換のみ可能な転換社債 | 80.0000 | 92.3293 | 80.1985 |
| 償還条項付き転換社債 | 80.0000 | 89.7278 | 80.1932 |
| 償還のみ可能な転換社債 | 59.5107 | 89.7278 | 53.2234 |

表2では，償還条項付き転換社債の価値は，償還のみ可能な転換社債に転換条項を付与することによってより高く評価され，転換のみ可能な転換社債に償還条項を付与することによってより低く評価されることを示した。これは，(27)式の関係を明らかにしている。

次にさまざまなパラメータを変化させ，転換社債の価値を視覚的に実現する。

まず，図2では配当の支払いがある場合，図3ではクーポンの支払いがある場合，図4では配当およびクーポンの支払いがある場合に対して，時刻0での企業価値を変化させ，償還条項付き転換社債，転換のみ，および償還のみ可能な転換社債の価値を図示した。

償還条項付き転換社債の価値は，図2では転換のみ可能な転換社債の価値と常に等しく，図3では償還のみ可能な転換社債の価値と常に等しい。このことは，配当がある場合，配当の支払い直前に投資家が転換政策を実行し，クーポンがある場合，クーポンの支払い直前に企業が償還政策を実行するからであると考えられる。

また，配当がある場合では$v \geq 125.98$, クーポンがある場合では$v \geq 124.80$, 配当およびクーポンがある場合では$v \geq 126.13$において償還のみ可能な転換社債は，これらの企業価値で転換価値が償還価格かつ転換社債の価値以上になる。このことは，企業が償還した際，投資家は転換社債を償還価格で買い戻されず，株式に転換するからであると考えられる。

さらに，図5では，図4の$120 \leq v \leq 130$を拡大して図示した。この図では償還条項付き転換社債の価値は，償還のみ可能な転換社債の価値以上であり，転換のみ可能な転換社債の価値以下であることが明らかであり，(27)式の関係を明確に示している。

次に，図6から図13では，配当およびクーポンの支払いがある場合の転換社債の価値をそれぞれパラメータを変化させて図示した。

まず，図6では，額面総額$F$, 償還価格$CP(t)$を変化させた。$F = CP(t) \geq 79.28$において償還のみ可能な転換社債の価値は急速に減少する。このことは，転換社債の価値を最小化しようとする企業は，

高い償還価格を払ってまでも償還しないからであると考えられる。

次に図7では，希薄化因子$z(t)$を変化させた。$z(t) \leq 0.51$において，転換のみ可能な転換社債と償還条項付き転換社債の価値は変化しない。このことは，転換社債の価値を最大化しようとする投資家は転換の際に受け取る株式数が少ないときは，転換をしないからであると考えられる。

図8では，無危険利子率$r$，図9では，ボラティリティ$\kappa$を変化させた。両者とも転換のみ可能な転換社債や償還条項付き転換社債の価値の変化はほとんどないが，償還のみ可能な転換社債の価値は，それぞれのパラメータに大きく依存して変化している。このことは，企業の償還政策に対してこれらのパラメータが大きな影響を及ぼしていることを示していると考えられる。

図10では，満期$T$の変化に対応させて，時間と資産の分割数$N_T$も変化させている。満期$T = 1, 2, \cdots, 20$に対して分割数を$N_T = 2000T$，配当とクーポンの支払い時点をそれぞれ$N_j^d = jN_T/2T, N_j^c = jN_T/4T$で与える。転換のみ可能な転換社債と償還条項付き転換社債は満期には依存せず，常に一定の価値を示している。このことは，投資家は満期に関係なく，転換社債を転換することを示していると考えられる。

図11では，配当率$\delta$を変化させた。$\delta \geq 0.07$において転換のみ可能な転換社債と償還条項付き転換社債は一定の価値を示している。このことは，投資家は企業価値が高い割合の配当落ちをする前に転換社債を転換していると考えられ，価値が一定であると思われる。

図12では，クーポンの支払額$i$を変化させた。支払額が10倍になっても微量の変化しかみられない。これは，クーポンは企業価値に関わらず，支払われることから，価値に影響を与えないと考えられる。

最後に，図13では，時刻0での企業価値を変化させ，償還条項付き転換社債の価値を配当の支払いがある場合，クーポンの支払いがある場合，配当およびクーポンの支払いがある場合について図示した。

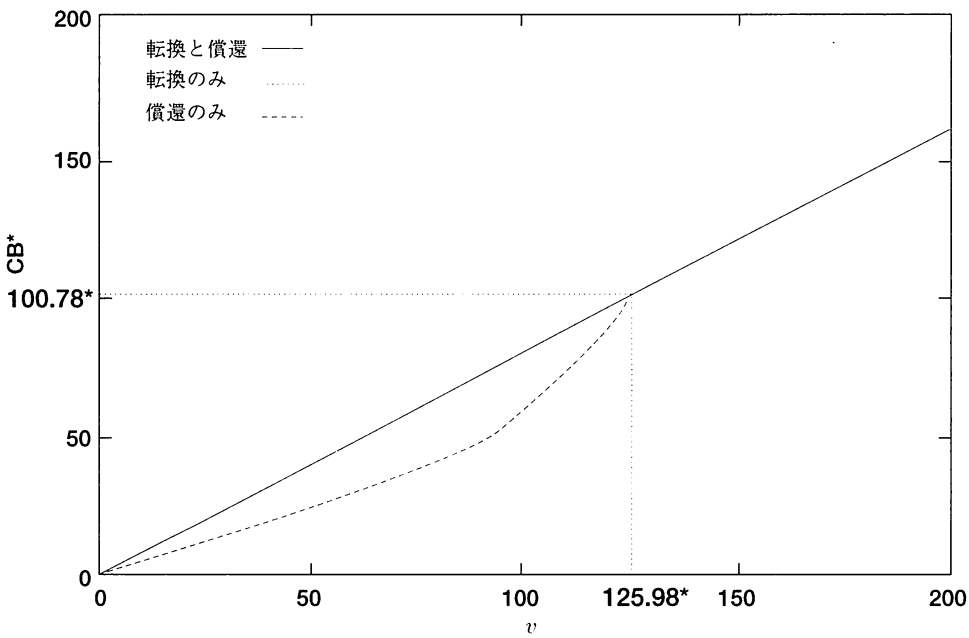


**図2　配当の支払いがある場合**$(0 \leq v \leq 200)$

$F = CP(t) = 100, z(t) = 0.8, r = 0.03, \kappa = 0.2, T = 2, \delta = 0.2, N_T = 4000$

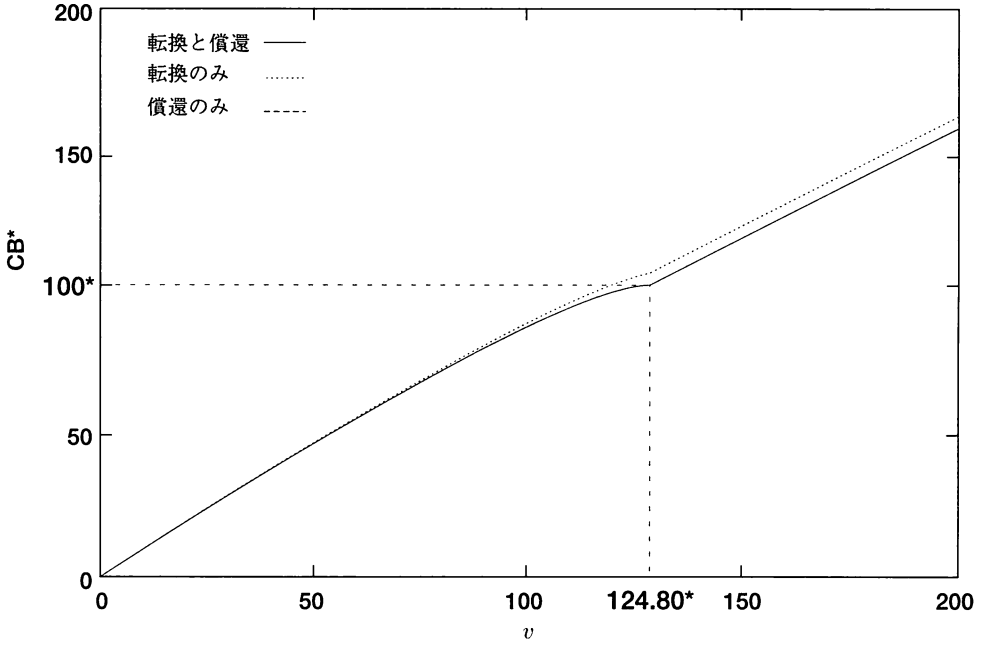


**図 3　クーポンの支払いがある場合** $(0 \leq v \leq 200)$

$F = CP(t) = 100, z(t) = 0.8, r = 0.03, \kappa = 0.2, T = 2, i = 1, N_T = 4000$

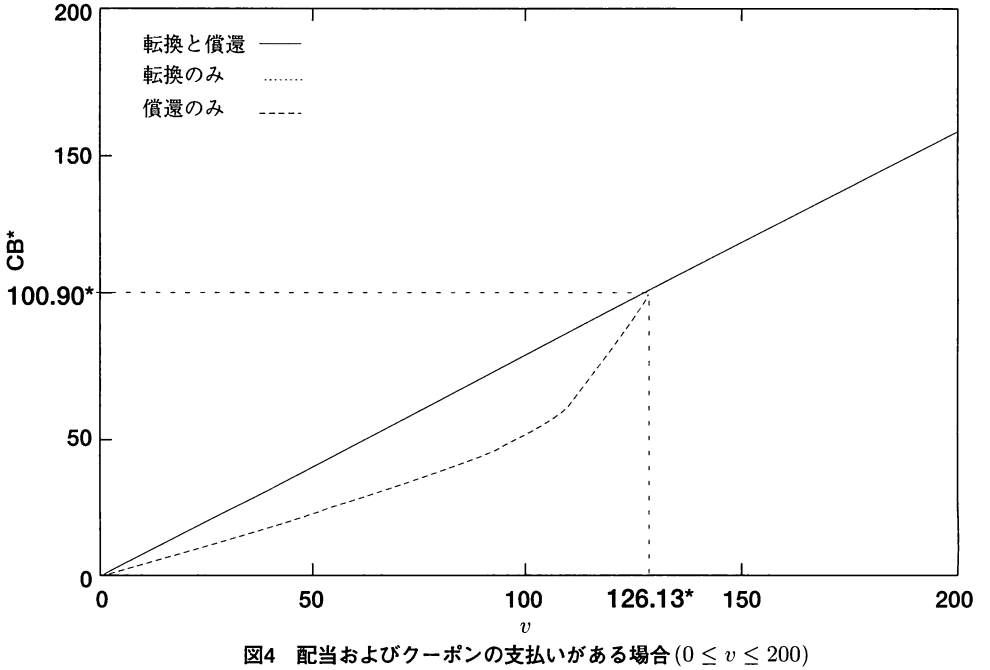


**図4　配当およびクーポンの支払いがある場合** $(0 \leq v \leq 200)$

$F = CP(t) = 100, z(t) = 0.8, r = 0.03, \kappa = 0.2, T = 2, \delta = 0.2, i = 1, N_T = 4000$

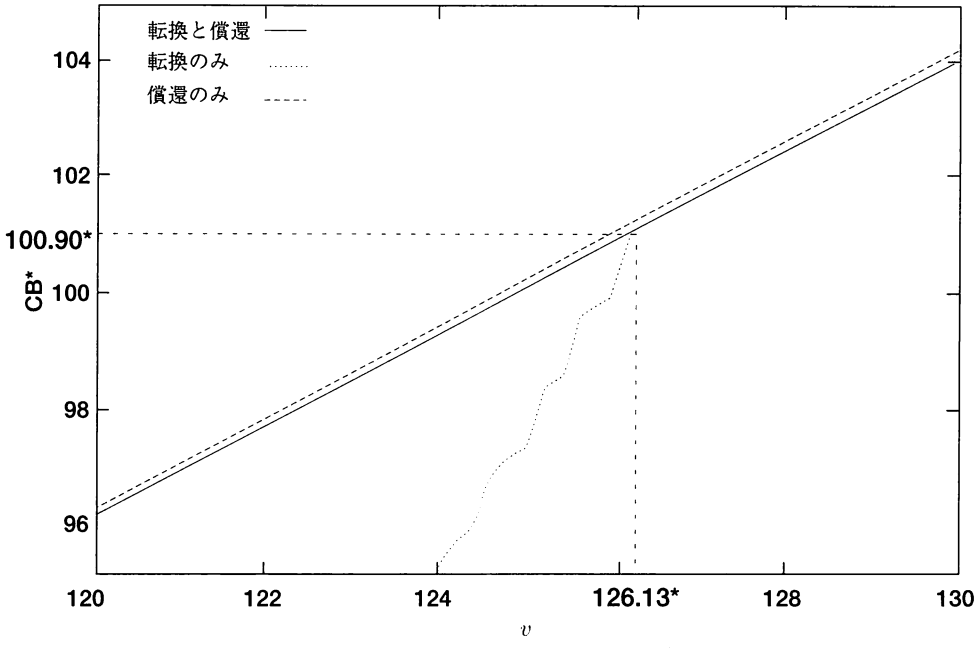


**図5　配当およびクーポンの支払いがある場合** $(120 \leq v \leq 130)$

$F = CP(t) = 100, z(t) = 0.8, r = 0.03, \kappa = 0.2, T = 2, \delta = 0.2, i = 1, N_T = 4000$

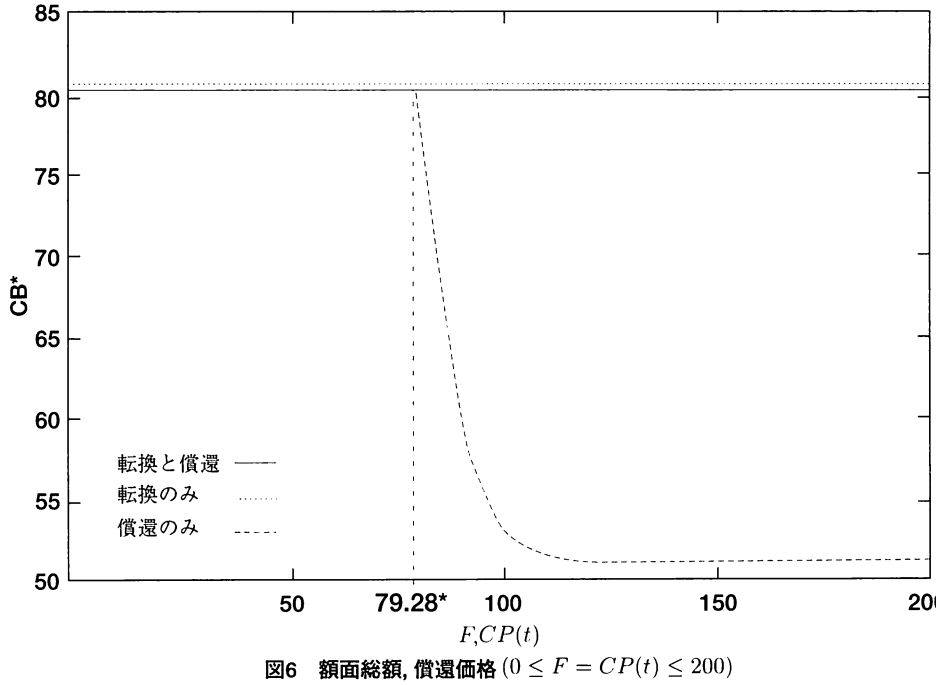


**図6　額面総額, 償還価格** $(0 \leq F = CP(t) \leq 200)$

$v = 100, z(t) = 0.8, r = 0.03, \kappa = 0.2, T = 2, \delta = 0.2, i = 1, N_T = 4000$

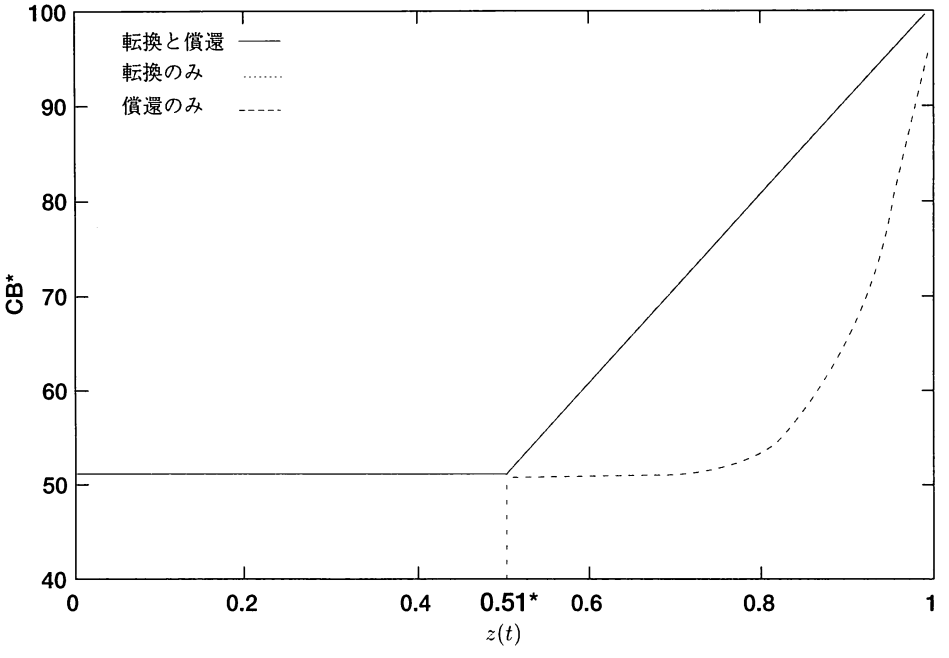


**図7　希薄化因子**$(0 \leq z(t) \leq 1)$

$v = 100, F = CP(t) = 100, r = 0.03, \kappa = 0.2, T = 2, \delta = 0.2, i = 1, N_T = 4000$

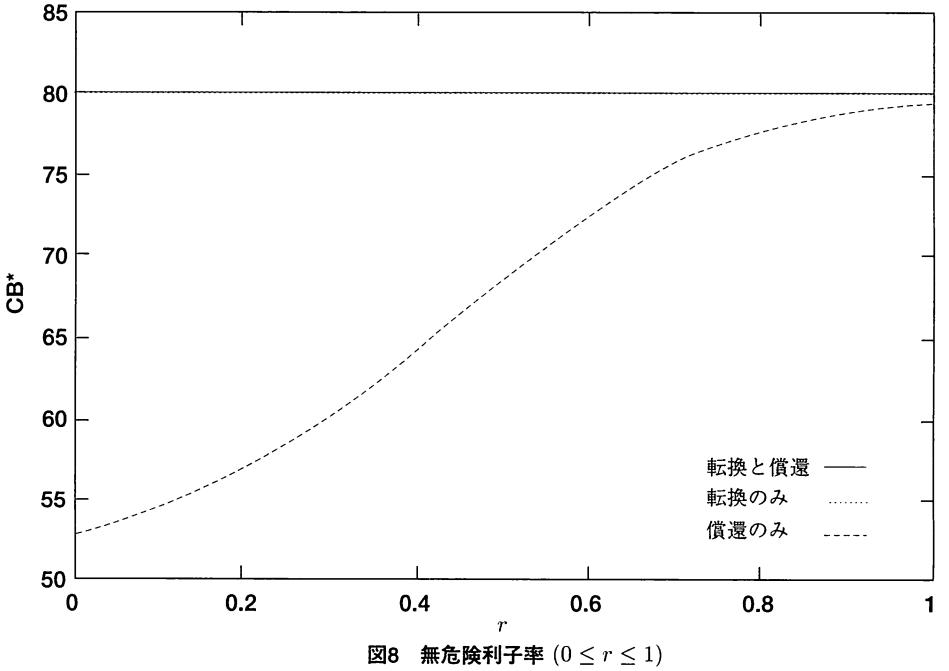


**図8　無危険利子率** $(0 \leq r \leq 1)$

$v = 100, F = CP(t) = 100, z(t) = 0.8, \kappa = 0.2, T = 2, \delta = 0.2, i = 1, N_T = 4000$

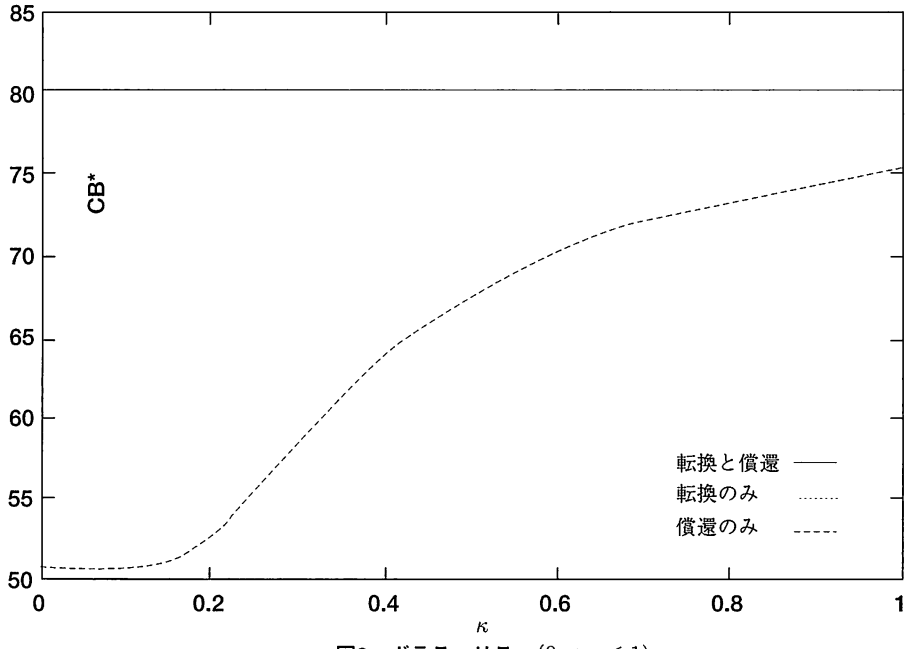


**図9　ボラティリティ** $(0 < \kappa \leq 1)$

$v = 100, F = CP(t) = 100, z(t) = 0.8, r = 0.03, T = 2, \delta = 0.2, i = 1, N_T = 4000$

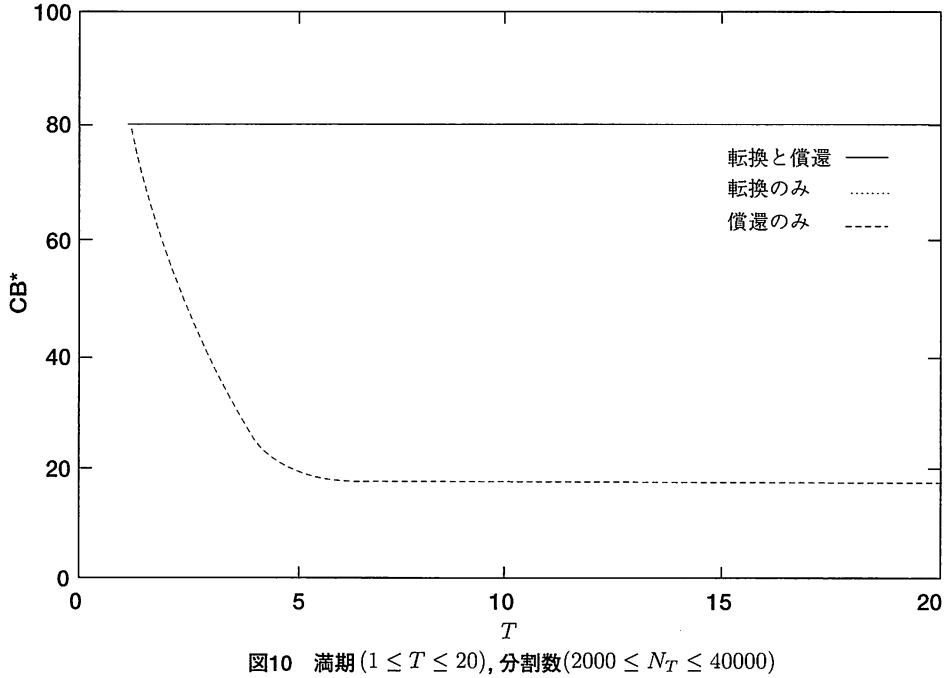


**図10　満期** $(1 \leq T \leq 20)$**, 分割数**$(2000 \leq N_T \leq 40000)$

$v = 100, F = CP(t) = 100, z(t) = 0.8, r = 0.03, \kappa = 0.2, \delta = 0.2, i = 1$

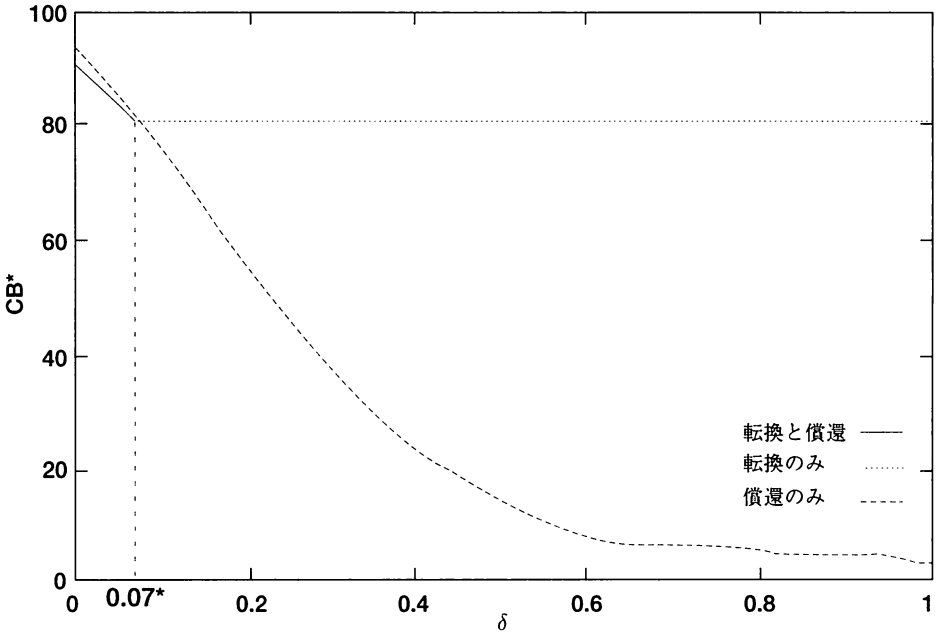


**図11　配当率** $(0 \leq \delta \leq 1)$

$v = 100, F = CP(t) = 100, z(t) = 0.8, r = 0.03, \kappa = 0.2, T = 2, i = 1, N_T = 4000$

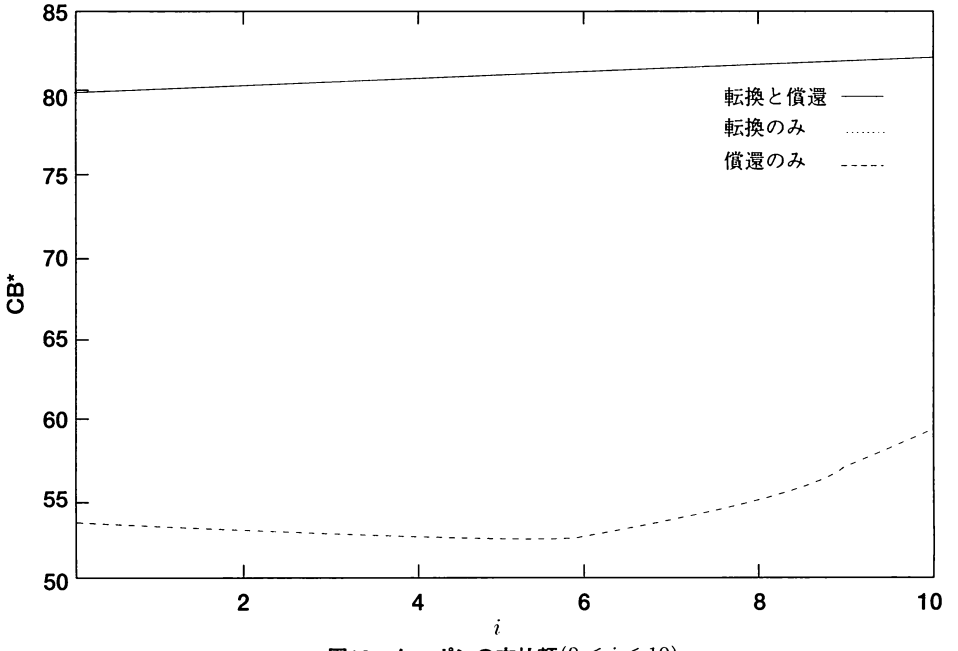


**図12　クーポンの支払額** $(0 \leq i \leq 10)$

$v = 100, F = CP(t) = 100, z(t) = 0.8, r = 0.03, \kappa = 0.2, T = 2, \delta = 0.2, N_T = 4000$

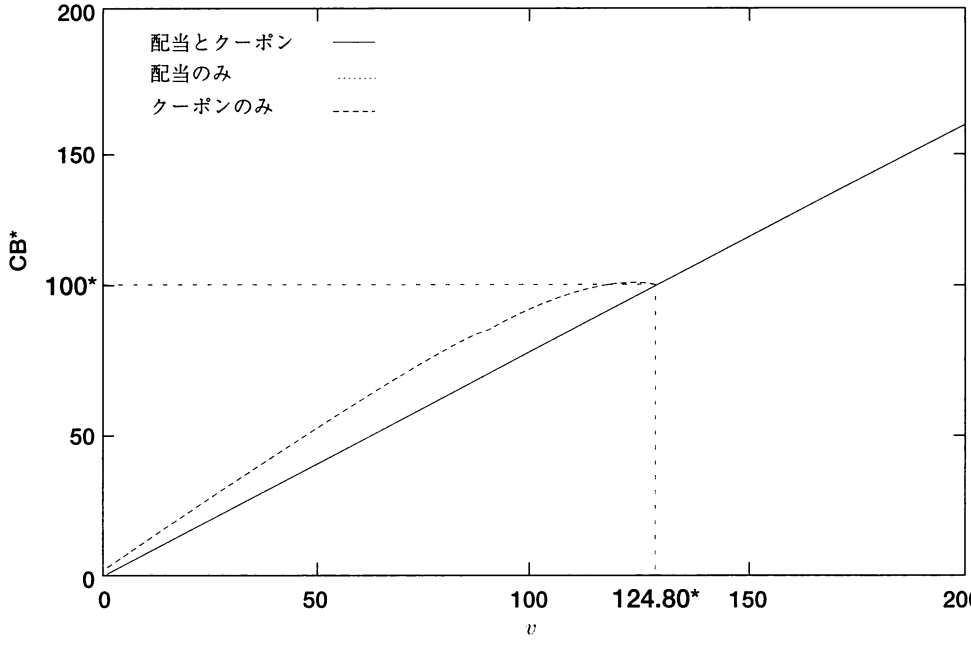


**図13　償還条項付き転換社債の価値**$(0 \leq v \leq 200)$

$$F = CP(t) = 100, z(t) = 0.8, r = 0.03, \kappa = 0.2, T = 2, i = 1, N_T = 4000$$

## 4　まとめと今後の課題

本論文では，償還条項付き転換社債に対して Brennan and Schwartz(1977,1980) で危険資産として用いられた企業価値を配当およびクーポンの支払いに対して新たな取引可能な資産へ変換することで条件付き請求権に対する評価理論を展開した。そして，投資家の最適転換政策と企業の最適償還政策の定性的な性質を明らかにし，最適な転換時刻と最適な償還時刻を定義することで，投資家に転換条項を付与することで転換社債の価値がより高く評価され，企業に償還条項を付与することでより低く評価されることを論証した。

また，二項モデルに基づく数値計算を通して転換社債の価格の評価式と最適政策を配当およびクーポンの有無，また，$v$，$F$,$CP(t)$,$z(t)$，$r$,$\kappa$，$T$，$\delta$,$i$ に関する変化の下で視覚的に実現し，考察した。

さらに今後の課題として，実際の市場で取引されている転換もしくは償還が確率的に抽選でおこなわれるモデルや割増償還を取り入れたモデル，企業価値のボラティリティを確率変数とみなすモデル，外国通貨建の転換社債の評価などの研究が挙げられる。

## 謝　辞

本論文の作成にあたり，レフェリーの方から賜りました有益なご助言を頂戴しました。この場を借りて感謝致します。

## ■参考文献


[ 1 ] Brennan, M. J. and E. S. Schwartz(1977), "Convertible Bonds : Valuation and Optimal Strategies for Call and Conversion", The Journal of Finance, Vol.32, pp.1699-1715.

[ 2 ] Brennan, M. J. and E. S. Schwartz(1980), "Analyzing Convertible Bonds", The Journal of Financial Quantitative Analysis, Vol.15, pp.907-929.

[ 3 ] Epstein, D., R. Haber and P. Wilmott(2000), "Pricing and Hedging Convertible Bonds Under Non-Probabilistic Interest Rates", Journal of Derivatives, Vol.7, No.4, pp.31-40.

[ 4 ] Etheridge, A.(2002), A Course in Financial Calculus, Cambridge University Press.

[ 5 ] Greiner, D., A. Kalay and H. K. Kato(2002), "The Market for Callable-Convertible Bonds: Evidence from Japan", Pacific-Basin Finance Journal, Vol.10, No.1, pp.1-27.

[ 6 ] Karatzas, I. and S. Shreve(1991), Brownian Motion and Stochastic Calculus, Springer, New York.

[ 7 ] Kariya T. and H. Tsuda(2000), "CB -Time Dependent Markov Model for PricingConvertibl eBonds", Asian-Pacific Financial Markets, Vol.7, No.3, pp.239-259.

[ 8 ] Kifer, Y.(2000), "Game Options" ,Finance and Stochastics, Vol.4, pp.443-463.

[ 9 ] Kamberton, D. and B. Lapeyre(1996), Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance,Chapman and Hall.

[10] 澤木勝茂, 瀬古進(2003),「互恵型アメリカンオプションの評価について」,『日本ファイナンス学会第11 回大会予稿集』, pp.525-537.

[11] 澤木勝茂, 八木恭子(2003),「償還条項付き転換社債の評価について」,『日本経営財務研究学会第27 回全国大会報告要旨集』, pp.26-27.