ID	JJF00216

論文名	確率的利子率とプロジェクトの評価
	Project valuation using stochastic discount rate
著者名	董晶輝 飯原慶雄
	Jinghui Dong Yoshio Iihara
ページ	30-42

雑誌名	経営財務研究
	Japan Journal of Finance
発行巻号	第23巻第1号
	Vol.23 / No. 1
発行年月	2004年3月
	Mar. 2004
発行者	日本経営財務研究学会
	Japan Finance Association
ISSN	2186-3792

■論　文

確率的利子率とプロジェクトの評価

董　晶輝　飯原　慶雄
（東洋大学）

■要　旨■

リアル・オプションによるプロジェクトの評価の議論では利子率を一定と仮定する場合が多い。この論文は，利子率が確率的に変動する場合について，予め決めた将来時点で条件付で採用されるプロジェクトの評価の枠組を提示する。数値分析を用いて，確率的利子率がプロジェクトの価値に与える影響について分析する。

キーワード：プロジェクトの評価，リアル・オプション，確率的利子率，確率的キャッシュフロー，確率的投資コスト

1　はじめに

リアル・オプション理論を応用してプロジェクトの現在価値を計算する際に，プロジェクトの投資実行条件によって，計算の方法が違ってくる。プロジェクトへの投資がいつでも可能な場合は，プロジェクトの現在価値が最大になるような投資の実行条件を求めて，この条件が満たされるときに，投資が行われるとして，プロジェクトの現在価値を計算する。この場合のプロジェクトの現在価値は永久アメリカン・コール・オプションに類似する[(1)]。これに対して，プロジェクトの投資が将来ある時点のみで実行可能な場合は，そのときの状況に応じて，プロジェクトの投資を行うか否かが判断されるので，プロジェクトの現在価値はヨーロピアン・コール・オプションに類似する。この論文は，後者の方法を用いて，将来ある時点で投資の実行が可能となり，そのときの状況によって採否が決定されるプロジェクトの現在価値の評価について考える。投資がすぐに実行できないプロジェクトが多く存在する。一般に研究開発，設計，テスト・プラントの運営などの準備を経てからプロジェクトへの投資が可能となる。準備の段階にはある程度の時間を要するので，プロジェクトを実行する時点で状況が変化し，プロジェクトを実行しない方がよいことになるかもしれない。プロジェクトの準備に着手するかどうかを決定するためには，プロジェクトを実行したときに得られるキャッシュフローの現在価値から投資コストを差し引いたものを現在時点で評価し，これを準備費用と比べる必要があるので，プロジェクトの現在価値が意思決定の基準となる。

これまで，多くのリアル・オプションの文献では，無危険利子率を一定と仮定している。Berk

(1) McDonald and Siegel(1986)はリアル・オプション理論の先駆的な研究で，Dixit and Pindyck(1994)はリアル・オプション理論の初期の研究を総括している。Copeland and Antikarov(2001)は実務者向けに，離散時間モデルでこれらの考え方について丁寧に説明している。

etc.(1999) では将来実行する可能性のあるプロジェクトの評価について確率的に変動する利子率を用いているが，離散時間モデルで議論し，将来次々と投資機会が発生するような場合の企業価値の評価を考えた。投資コストについては，将来のキャッシュフローと比例的な関係を仮定している。この論文では，連続時間モデルで，キャッシュフローと投資コストの変動が幾何ブラウン運動に従うとし，確率的利子率を用いて，プロジェクトの評価を試みる。

論文は以下のように構成される。次の節では，論文の主要な内容となるプロジェクトの評価の方法を考え，解析的結果を示す。**3**では，数値解析を用いて確率的利子率を使用する効果を検討する。**4**では結論を述べる。付録には**2**の補題について，証明を記す。

2　プロジェクトの評価

予め決められた時刻 t で投資コスト K_t を支出することで，プロジェクトの実行ができ，プロジェクトが存続する期間中，連続的に確率的に変動するキャッシュフローが発生するとする。プロジェクトから発生するキャッシュフローの変動が幾何ブラウン運動に従うと仮定し，次の確率微分方程式，

$$dC_t = \mu_c C_t dt + \sigma_c C_t dW_c \tag{1}$$

で表す。ここで，μ_c，σ_c は定数で，W_c はウィーナー過程である。

確率的キャッシュフローについての適切な確率的割引因子[(2)]を Z_t とし，その変動が次の確率微分方程式に従うとする。

$$dZ_t = -r_t Z_t dt - \sigma_z Z_t dW_z \tag{2}$$

σ_z は定数で，W_z はウィーナー過程である。$dW_c dW_z = \rho_{cz} dt$，$\rho_{cz}\sigma_c\sigma_z = \sigma_{cz}$ とする。r_t は無危険利子率である。

無危険利子率の変動を Vasicek（1977）モデルを用いて表現する。

$$dr_t = a(\bar{r} - r_t)dt + \sigma_r dW_r \tag{3}$$

ここで，a，$\bar{r}$，σ_r は定数，W_z はウィーナー過程である。$dW_r dW_c = \rho_{rc} dt$，$\rho_{rc}\sigma_r\sigma_c = \sigma_{rc}$，$dW_r dW_z = \rho_{rz} dt$，$\rho_{rz}\sigma_r\sigma_z = \sigma_{rz}$ とする。

Vasicek モデルでは，利子率の変動が線形確率微分方程式によって与えられるので，ある時点の利子率が与えられたとすれば，将来時点の利子率の表現は比較的に単純なものとなる。時刻 t での利子率が r_t である場合，s 時間後の利子率は (3) 式から，

$$r_{t+s} = r_t e^{-as} + \bar{r}(1 - e^{-as}) + \sigma_r \int_t^{t+s} e^{-a(t+s-\tau)} dW_\tau \tag{4}$$

となる。利子率の時刻tから時刻$t+s$までの積分は

$$\int_t^{t+s} r_\tau d\tau = r_t B_s + \bar{r}(s - B_s) + \sigma_r \int_t^{t+s} B_{t+s-\tau} dW_\tau \tag{5}$$

となる。ここで $B_s = (1 - e^{-as})/a$ である。

プロジェクトの存続期間を T とし，確率的割引因子を用いることで，プロジェクトから発生するキャッシュフローの時刻 t での現在価値は，

$$U = E_t\left[\int_0^T (Z_{t+s} / Z_t) C_{t+s} ds\right] \tag{6}$$

となる。

(2)　確率的割引因子と確率的キャッシュフローの評価について詳しい議論は Cochrane(2001)，飯原(2001) を参照。

命題1　キャッシュフロー率の変動が(1)式，確率的割引因子が(2)式に従うとすると，時刻$t+s$でのキャッシュフローの時刻tでの現在価値は，

$$E_t\left[\left(Z_{t+s}/Z_t\right)C_{t+s}\right]=C_tU_s\left(r_t\right) \tag{7}$$

$$U_s\left(r_t\right)=\exp\left[\left(\mu_c-\sigma_{cz}\right)s+\left(\sigma_{rz}-\sigma_{rr}\right)\int_0^s B_{s-\tau}d\tau\ -r_tB_s-\bar{r}\left(s-B_s\right)+\sigma_r^2/2\int_0^s B_{s-\tau}^2d\tau\right] \tag{8}$$

となる[(3)]。

証明　幾何ブラウン運動の性質から，

$$Z_{t+s}/Z_t=\exp\left[-r_tB_s-\bar{r}\left(s-B_s\right)-\sigma_r\int_t^{t+s}B_{t+s-\tau}dW_r-\sigma_z^2s/2-\sigma_z\int_t^{t+s}dW_z\right] \tag{9}$$

$$C_{t+s}=C_t\exp\left[\left(\mu_c-\sigma_c^2/2\right)s+\sigma_c\int_t^{t+s}dW_c\right] \tag{10}$$

となる。

(9)式と(10)式の左辺の指数部分を足し合わせて，平均と分散を計算する。正規確率変数xの平均がμ_x，分散がσ_x^2であるとき，$E(e^x)=\exp(\mu_x+\sigma_x^2/2)$であることから，(7)式を得る。　証明終

無危険利子率が一定である場合，$U_s(r_t)=\exp(\mu_c-\sigma_{cz}-r)s$となる。$\sigma_{cz}$は一般にリスク・プレミアム(risk premium)あるいはコンビニエンス・イールド(conveniece yield)と呼ばれるものである。$\mu_c-\sigma_{cz}$はリスク修正後のキャッシュフローのドリフトとなるので，無危険利子率rが割引率となる。ここでは，各時点について，キャッシュフローのリスクを修正し，その時点で満期となる割引債価格をかけている[(4)]。

プロジェクトから発生するキャッシュフローの時刻での現在価値は，

$$U=C_t\int_0^T U_s(r_t)ds \tag{11}$$

となる。

時刻tで，キャッシュフローの現在価値Uが投資コストK_tを上回った場合のみに投資を実施するのであれば，プロジェクトの時刻0での現在価値は，

$$V=E_0\left[\left(Z_t/Z_0\right)\max\left(U-K_t,0\right)\right] \tag{12}$$

となる。

無危険利子率rが一定の場合には，Uが対数正規確率変数となるので，K_tが定数であるとすると，VはBlack-Scholes(1973)モデルで計算することができる[(5)]。しかし，無危険利子率が確率的に変動する場合にはUが対数正規確率変数にはならないので，直接にBlack-Scholes式でVを計算することはできない。

(4)式から無危険利子率r_tが正規確率変数であることが分かる。(7)と(8)式から，明らかに$C_tU_s\left(r_t\right)$

(3)　$\int_0^s B_{s-\tau}d\tau=\left(s-B_s\right)/a$，$\int_0^s B_{s-\tau}^2=\left(s-B_s\right)/a^2-B_s^2/(2a)$

(4)　$\mu_c=\rho_{cz}=\rho_{rr}=0$のとき，$U_s(r_t)$は満期までの期間がSの割引債の時刻tでの価格となる。

(5)　K_tも対数正規確率変数であるときにはMargrabe(1978)の交換オプション（Exchange Option）モデルで計算できる。

は対数正規確率変数である。$U_s(r_t)$がr_tの単調減少関数であるので，Jamshidian(1989)の債券ポートフォリオ・オプションの評価手法を利用し，プロジェクトの現在価値Vの評価に適用する。

$F_t = K_t/C_t$とし，r^*が次の方程式，

$$\int_0^T U_s(r^*)ds = F \tag{13}$$

を満たすとする[6]。

(12)式は次のようになる[7]。

$$\begin{aligned} V &= E_0\left\{(Z_t/Z_0)C_t \max\left[\int_0^T U_s(r_t)ds - \int_0^T U_s(r^*)ds, 0\right]\right\} \\ &= \int_0^T E_0\left\{(Z_t/Z_0)C_t \max\left[U_s(r_t) - U_s(r^*), 0\right]\right\}ds \end{aligned} \tag{14}$$

(14)式の右辺の被積分関数を，

$$V_s = E_0\left\{(Z_t/Z_0)C_t \max\left[U_s(r_t) - U_s(r^*), 0\right]\right\} \tag{15}$$

で表すとすると，

$$V = \int_0^T V_s ds \tag{16}$$

となるので，V_sを計算すれば，Vを計算できる。以降の議論はV_sの計算を問題とする。

補題1　対数正規確率変数XとYについて，

$$E\left[\max(X-Y,0)\right] = E(X)N(d) - E(Y)N(d-\sigma)$$

が成り立つ。ここで，$N(\cdot)$は標準正規確率分布関数で，

$$d = \left[\ln\left(E(X)/E(Y)\right) + \sigma^2/2\right]/\sigma$$
$$\sigma^2 = \mathrm{var}\left(\ln(X/Y)\right)$$

である。(証明は付録)

(15)式の右辺の2つの項をそれぞれ，

$$(Z_t/Z_0)C_t U_s(r_t) = X_s \tag{17}$$
$$(Z_t/Z_0)C_t U_s(r^*) = X_s^* \tag{18}$$

とすると，

$$V_s = E_0\left[\max\left(X_s - X_s^*, 0\right)\right]$$

となる。

投資コストとキャッシュフロー率が比例関係にあると仮定する。この場合，Fが定数となるので，r^*が確定値となる。X_sとX_s^*がいずれも対数正規確率変数となるので，補題1を利用すると，

(6)　$F \geq 0$であればr^*は存在する。$r^* \geq 0$と限定するならば，$\int_0^T U_s(0)ds \geq F \geq 0$を満たさなければならない。

(7)　ここでは，プロジェクトの終了時点Tを一定としているが，Tが確率的に変動する場合にはTの分布が確定的であれば，この議論を適用できる。

$$V_s = E_0(X_s)N(d_s) - E_0(X_s^*)N(d_s - \sigma_s)$$
$$d_s = \left[\ln\left(E_0(X_s)/E_0(X_s^*)\right) + \sigma_s^2/2\right]/\sigma_s$$
$$\sigma_s^2 = \mathrm{var}\left(\ln\left(X_s/X_s^*\right)\right)$$

と書ける。$E_0(X_s)$, $E_0(X_s^*)$, $\mathrm{var}(\ln(X_s/X_s^*))$ の計算が問題となる。

命題2　X_s と X_s^* がそれぞれ(17)式と(18)式で定義され，r^* が確定値である場合，0時点の情報の下では，

$$E_0(X_s) = C_0 U_{t+s}(r_0) \tag{19}$$

$$E_0(X_s^*) = C_0 U_t(r_0) U_s(r^*) \tag{20}$$

$$\mathrm{var}\left(\ln\left(X_s/X_s^*\right)\right) = \sigma_r^2 B_s^2 \left(1 - e^{-2at}\right)/2a \tag{21}$$

となる。

証明　(17)式左辺の $C_t U_s(r_t)$ をその定義である(7)式の左辺で代入し，期待値の性質を利用して整理すると，

$$E_0(X_s) = E_0\left[(Z_{t+s}/Z_0)C_{t+s}\right]$$

となる。$U_s(r^*)$ は定数であるので，

$$E_0(X_s^*) = E_0\left[(Z_t/Z_0)C_t\right]U_s(r^*)$$

である。それぞれの右辺に命題1を適用すると，(19)式と(20)式の右辺を得られる。
X_s と X_s^* に(8)式を代入して整理すると，

$$\ln(X_s / X_s^*) = B_s(r_t - r^*)$$

となる。(4)式で r_t を0時点の利子率 r_0 で表現し，r^* が定数であるから，

$$\mathrm{var}\left(\ln\left(X_s / X_s^*\right)\right) = \mathrm{var}\left(B_s \sigma_r \int_0^t e^{-a(t-\tau)} dW_r\right) \tag{22}$$

となる。(22)の右辺について計算すれば，(21)式を得る。　証明終

Berk etc.(1999)は離散時間モデルで，類似の議論をしている。投資コストがキャッシュフローと比例関係にあると仮定して議論するのは，現実を説明する際に限定的な意味しか持たないが，次の一般的な議論に拡張するときの基本となる。

投資コストについてより一般的な仮定を考える。ここでは，投資コスト K_t の変動が幾何ブラウン運動に従うとし，次の確率微分方程式で表す。

$$dK_t = \mu_k K_t dt + \sigma_k K_t dW_k \tag{23}$$

ここで，μ_k，σ_k は定数で，dW_k はウィーナー過程である。$dW_z dW_k = \rho_{zk} dt$，$dW_r dW_k = \rho_{rk} dt$，$dW_c dW_k = \rho_{ck} dt$，$\rho_{zk}\sigma_z\sigma_k = \sigma_{zk}$，$\rho_{rk}\sigma_r\sigma_k = \sigma_{rk}$，$\rho_{ck}\sigma_c\sigma_k = \sigma_{ck}$ とする。

この場合(13)式の右辺 F が対数正規確率変数となる。(13)式を満たす確定値 r^* が存在しないので，直接に V_s を計算することはできない。対数正規確率変数 F がとりうる値 $0 \le F \le \infty$ で，ある確定値 f を与えると，(13)式を満たす r^* が求められ，$F = f$ のときに，

$$V_s(f)=E_0\left[\max\left(X_s-X_s^*,0\right)|F=f\right] \tag{24}$$

とする。

(24) 式に補題 1 を適用すると,

$$V_s(f)=E_0\left(X_s|F=f\right)N\left(d_s(f)\right)-E_0\left(X_s^*|F=f\right)N\left(d_s(f)-\sigma_s(f)\right)$$

となる。ここで

$$d_s(f)=\left[\ln\left(E_0\left(X_s|F=f\right)/E_0\left(X_s^*|F=f\right)\right)+\sigma_s^2(f)/2\right]/\sigma_s(f)$$

$$\sigma_s^2(f)=\mathrm{var}\left(\ln\left(X_s/X_s^*\right)|F=f\right)$$

である。

$V_s(f)$ が求まれば,

$$V_s=\int_{-\infty}^{+\infty}V_s\left(e^x\right)\phi(x)dx \tag{25}$$

となる。$\phi(x)$ は平均 $\mu_f t=\ln K_0-\ln C_0+\left(\mu_k-\sigma_k^2/2-\left(\mu_c-\sigma_c^2/2\right)\right)t$, 分散 $\sigma_f^2 t=\left(\sigma_k^2+\sigma_c^2-2\sigma_{ck}\right)t$ の正規確率変数の密度関数を表す。

残された問題は $E_0\left(X_s|F=f\right)$, $E_0\left(X_s^*|F=f\right)$, $\mathrm{var}\left(\ln\left(X_s/X_s^*\right)|F=f\right)$ の計算のみである[(8)]。

補題 2　対数正規確率変数 X と Y について,

$$E\left(X|Y=\Psi\right)=E(X)\Psi^{\beta}/E\left(Y^{\beta}\right) \tag{26}$$

となる。ここで, $\beta=\mathrm{cov}(\ln X,\ln Y)/\mathrm{var}(Y)$ である。(証明は付録)

命題 3　0 時点の情報のもとで,

$$E_0\left(X_s|F=f\right)=E_0\left(X_s\right)f^{\beta_s}/E_0\left(F^{\beta_s}\right) \tag{27}$$

$$E_0\left(X_s^*|F=f\right)=E_0\left(X_s^*\right)f^{\beta_0}/E_0\left(F^{\beta_0}\right) \tag{28}$$

$$\mathrm{var}\left(\ln\left(X_s/X_s^*\right)|F=f\right)=\sigma_r^2B_s^2\frac{1-e^{-2at}}{2a}-\frac{\left[\left(\sigma_{rc}-\sigma_{rk}\right)B_tB_s\right]^2}{\sigma_f^2t} \tag{29}$$

となる。ここで,

$$\beta_s=\frac{\left(\sigma_{rc}-\sigma_{rk}\right)\left(t-e^{-as}B_t\right)/a+\left(\sigma_{ck}-\sigma_c^2-\sigma_{zk}+\sigma_{zc}\right)t}{\sigma_f^2t} \tag{30}$$

$$\beta_0=\frac{\left(\sigma_{rc}-\sigma_{rk}\right)\left(t-B_t\right)/a+\left(\sigma_{ck}-\sigma_c^2-\sigma_{zk}+\sigma_{zc}\right)t}{\sigma_f^2t} \tag{31}$$

(8)　投資コストを一定と考える場合には, C_t についての条件付期待値を計算する必要があるので, ここでの議論と類似する。

$$E_0\left(F^{\beta_t}\right)=\exp\left(\beta_\tau\mu_f t+\beta_\tau^2\sigma_f^2 t/2\right) \tag{32}$$

である。

証明　補題2を利用すると，(27)式と(28)式を得る。ここで $E_0(X_s)$ と $E_0(X_s^*)$ は命題2での(19)式と(20)式を利用する。

補題2での β の定義から，

$$\beta_s=\mathrm{cov}\left(\ln X_s,\ln F\right)/\mathrm{var}\left(\ln F\right)$$
$$\beta_0=\mathrm{cov}\left(\ln X_s^*,\ln F\right)/\mathrm{var}\left(\ln F\right)$$

である。

X_s，X_s^* と F の定義から，

$$\ln X_s=\alpha_1-\sigma_r\int_0^t B_{t-\tau}dW_r-\sigma_z\int_0^t dW_z+\sigma_c\int_0^t dW_c-B_s\sigma_r\int_0^t e^{-a(t-\tau)}dW_r$$

$$\ln X_s^*=\alpha_2-\sigma_r\int_0^t B_{t-\tau}dW_r-\sigma_z\int_0^t dW_z+\sigma_c\int_0^t dW_c$$

$$\ln F=\alpha_3+\sigma_k\int_0^t dW_k-\sigma_c\int_0^t dW_c$$

となる。ここで α_1，α_2，α_3 は確率変数の非確率的に変動する部分を表す。

$$B_{t-\tau}+B_s e^{-a(t-\tau)}=B_{t+s-\tau}$$

を用いて，$\ln X_s$ での W_r についての2つの積分の項を整理し，β_s と β_0 を計算すると，(30)式と(31)式を得られる。

正規確率変数 x と y について，$\mathrm{var}\left(x|y=\psi\right)=\mathrm{var}(x)-\left[\mathrm{cov}(x,y)\right]^2/\mathrm{var}(y)$ であるから，

$$\mathrm{var}\left(\ln\left(X_s/X_s^*\right)\middle|F=f\right)=\mathrm{var}\left(B_s\sigma_r\int_0^t e^{-a(t-\tau)}dW_r\right)$$
$$-\left[\mathrm{cov}\left(B_s\sigma_r\int_0^t e^{-a(t-\tau)}dW_r,\sigma_k\int_0^t dW_k-\sigma_c\int_0^t dW_c\right)\right]^2\Big/\mathrm{var}(\ln F)$$

となる。これを計算すると，(29)式を得る。　証明終

3　数値分析

前節で得られた解析的結果について，プロジェクトの評価に確率的利子率を用いた効果を解析的に分析することは困難である。この節では，前節で得られた投資コストが確率的に変動する場合の解析的結果について数値分析を行う。あるパラメータの効果を調べるため，他のパラメータを固定しておく必要があるので，計算に用いるすべてのパラメータの基準値を決めておく。パラメータの基準値は**表1**のとおりである。基準値でのプロジェクトの現在価値は約4.283となる。

表1　パラメータの基準値

パラメータ名		値
σ_z	確率的割引因子のボラティリティ	0.5
$\bar{r}$	無危険利子率の回帰水準	0.07
r_0	0時点での無危険利子率	0.05
a	無危険利子率の回帰速度	0.05
σ_r	無危険利子率のボラティリティ	0.002
μ_c	キャッシュフローのドリフト率	0.05
σ_c	キャッシュフロー変化率のボラティリティ	0.3
C_0	0時点でのキャッシュフロー率	1
μ_k	投資コストのドリフト率	0.04
σ_k	投資コスト変化率のボラティリティ	0.2
K_0	0時点での投資コスト	10
ρ_{zc}	W_z と W_c の相関係数	0.2
ρ_{zr}	W_z と W_r の相関係数	0
ρ_{zk}	W_z と W_k の相関係数	0.3
ρ_{rc}	W_r と W_c の相関係数	0.5
ρ_{rk}	W_r と W_k の相関係数	0.3
ρ_{ck}	W_c と W_k の相関係数	0.5
t	投資実行するまでの期間	2
T	プロジェクトの存続期間	20

無危険利子率を一定と仮定した場合との比較を考える。無危険利子率rが一定であるとすると，時刻tから$t+T$までに発生するキャッシュフローの時刻tでの現在価値は$C_t(1-e^{-(r-\mu_c+\sigma_{zc})T})/(r-\mu_c+\sigma_{zc})$となる。

プロジェクトの評価はBlack-Scholesタイプのモデルに類似する。この場合，プロジェクトの現在価値は，

$$V_{BS}=\frac{C_0e^{-(r-\mu_c+\sigma_{zc})t}\left(1-e^{-(r-\mu_c+\sigma_{zc})T}\right)}{r-\mu_c+\sigma_{zc}}N(d)-K_0e^{-(r-\mu_c+\sigma_{zk})t}N\left(d-\sigma_f\sqrt{t}\right)$$

となる。ここで，

$$d=\frac{\ln\left[\dfrac{C_0e^{-(r-\mu_c+\sigma_{zc})t}\left(1-e^{-(r-\mu_c+\sigma_{zc})T}\right)}{r-\mu_c+\sigma_{zc}}\right]-\ln\left(K_0e^{-(r-\mu_c+\sigma_{zk})t}\right)+\dfrac{\sigma_f^2t}{2}}{\sigma_f\sqrt{t}}$$

である。

Black-Scholesタイプのモデルによる評価と比較するため，$r=r_0=\bar{r}$とする。**図1**は$r=5\%$として，いろいろな無危険利子率のボラティリティの値で計算したVの結果と，V_{BS}の比較を示している。無危険利子率のボラティリティが小さいときには，それほどの差が現れないが，無危険利子率のボラティ

リティが大きくなるにつれ，両者の差が広がる。図1からわかるように，無危険利子率のボラティリティが零あるいはその近傍ではない限り，Black-Scholesモデルを利用して，プロジェクトを評価すると，誤差が生じる。特に無危険利子率のボラティリティが大きい場合には，この数値例では，Black-Scholesモデルを直接に利用することで，プロジェクトを過大評価している。

ここでは無危険利子率のボラティリティが大きくなるにつれ，プロジェクトの現在価値が減少する現象が起きている。これは相関係数が影響を与えていると考えられるので，ρ_{rc}とρ_{rk}について数値的に調べてみる。

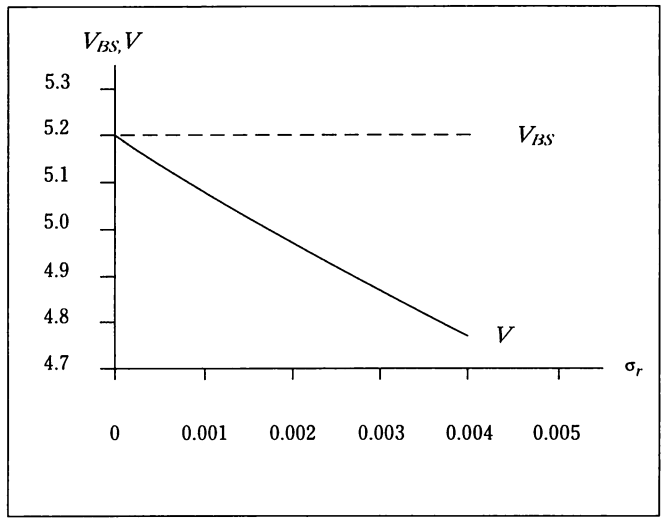

図1　Black-Scholesモデルとの比較

いくつか異なるρ_{rc}に対し，無危険利子率のボラティリティがプロジェクトの現在価値に与える効果を調べた。**図2**ではρ_{rc}が-0.5, 0, 0.5の3つの値をとるときについて，3本の曲線で表示している。ρ_{rc}が負の値をとるとき，σ_rプロジェクトの現在価値を上げる効果を持っている。その効果はσ_rが大きくなるにつれ大きくなる。$\rho_{rc}=0$のときには，σ_rはわずかにプロジェクトの現在価値を上げているので，一般のオプション評価での結果と一致している。ρ_{rc}が正の値をとるときには，σ_rがプロジェクトの現在価値を下げる効果を持っている。この結果が示していることは，無危険利子率のボラティリティがプロジェクトの現在価値に与える影響はキャッシュフローの変化率の変動と無危険利子率の変動の相関によって異なるので，確率的利子率でプロジェクトを評価する際，相関の推定が重要である。

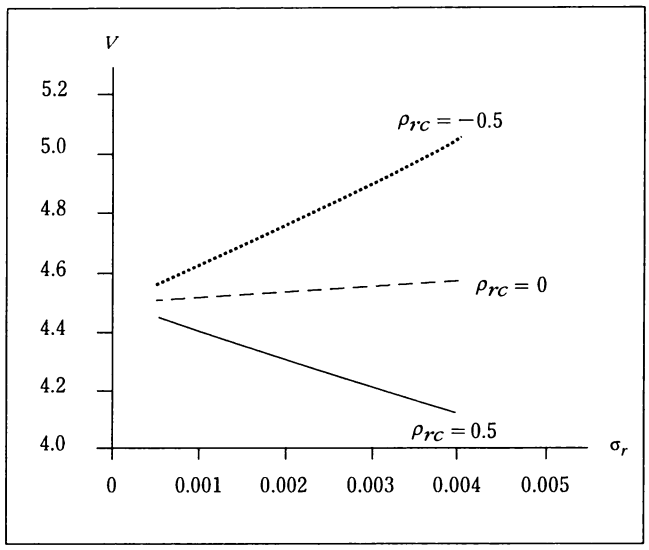

図2　無危険利子率のボラティリティの効果(1)

図3は無危険利子率のボラティリティが異なるρ_{rk}のときに，プロジェクトの現在価値に与える効果を示しいる。ρ_{rk}が正の値から負の値になるにつれプロジェクトの価値は次第に減少するが，その効果はεによるものに比べると小さい。これはキャッシュフローがプロジェクトの存続期間中に連続的に発生するものであるのに対し，投資コストは投資実行時に1回のみ支出されるものであるから，無危険利子率のボラティリティから受ける影響が少ない。

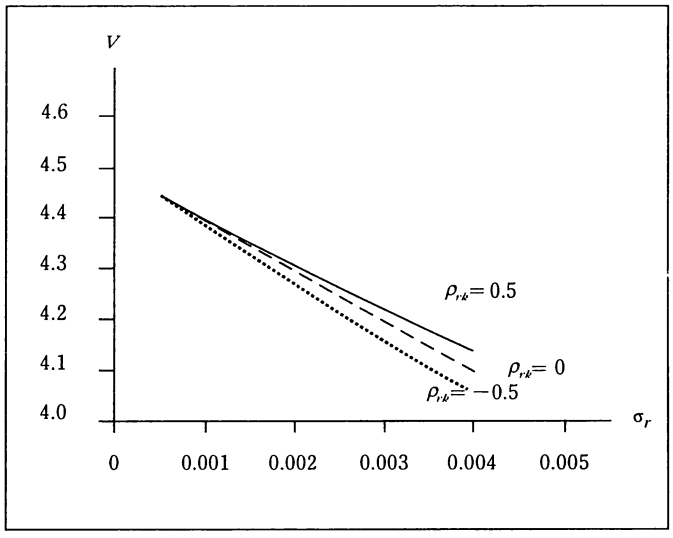

図3　無危険利子率のボラティリティの効果(2)

4 結　論

この論文は，予め決めた将来の時点で，採否が決定されるプロジェクトの現在価値の評価について議論した。プロジェクトが実行された場合，プロジェクトから連続的にキャッシュフローが発生するとし，その変動を幾何ブラウン運動に従うとした。プロジェクトを評価する際に，確率的割引因子を使用し，無危険利子率の変動については，Vasicek モデルを利用した。プロジェクトの実施時点で評価したキャッシュフローの現在価値が投資コストを上回るときにのみ投資が実施される場合，プロジェクトの準備開始時点での価値はヨーロピアン・オプションと類似するが，確率的割引因子を使用するため，Black-Scholes モデルを直接に利用して，プロジェクトを評価することはできない。そこで，Jamshidiam (1989) が債券ポートフォリオのオプション評価に用いた手法を利用しプロジェクトの評価法を考えた。まず，投資コストがキャッシュフローと比例関係にあると仮定し，プロジェクト評価の基本的な枠組みを構築した。次に，投資コストが確率的に変動する場合ついて，基本的な枠組みを拡張し，プロジェクトの評価法を確立した。最後には，数値分析を用いて，確率的割引因子がプロジェクトの価値に与える影響を検討した。確率的割引因子で評価したプロジェクトの価値と，利子率を一定と仮定して評価したプロジェクトの価値は場合によって乖離が生じる。乖離の原因は利子率のボラティリティだけではなく，確率的要素の間の相関も無視できない。プロジェクトを評価する際，これらの要因を考慮する必要があると考えられる。

付録

A　補題 1 の証明

$Z = X/Y$ とし，$\ln X = x, \ln Y = y, \ln Z = z$ とすると，

$$E\left[\max\left(X-Y,0\right)\right] = E\left[e^{y}\left(e^{z}-1\right)1_{z>0}\right]$$

と書ける。ここで，$1_{z>0}$ は指標関数である。

ε を平均が 0，分散が σ_{ε}^{2} の z と独立の正規確率変数とし，$y = \alpha + \beta z + \varepsilon$ とすると，

$$\begin{aligned} &E\left[e^{y}\left(e^{z}-1\right)1_{z>0}\right] \\ &\quad = \exp\left(\alpha + \sigma_{\varepsilon}^{2}/2\right)\left[E\left(\exp\left((1+\beta)z\right)1_{z>0}\right) - E\left(\exp\left(\beta z\right)1_{z>0}\right)\right] \end{aligned}$$

となる。

x, y, z の平均をそれぞれ μ_x, μ_y, μ_z，分散をそれぞれ $\sigma_x^2, \sigma_y^2, \sigma_z^2$，共分散をそれぞれ σ_{xy}, σ_{yz} とする。平均が μ，分散が σ^2 の正規確率変数 w と定数 k について，

$$E\left(e^{kw}1_{w>0}\right) = \exp\left(k\mu + k^{2}\sigma^{2}/2\right)N\left(\left(\mu + k\sigma^{2}\right)/\sigma\right)$$

であるから，

$$\begin{aligned} &\exp\left(\alpha + \sigma_{\varepsilon}^{2}/2\right)E\left(\exp\left((1+\beta)z\right)1_{z>0}\right) \\ &\quad = \exp\left(\alpha + (1+\beta)\mu_z + (1+\beta)^{2}\sigma_z^{2}/2 + \sigma_{\varepsilon}^{2}/2\right)N\left(\left(\mu_z + (1+\beta)\sigma_z^{2}\right)/\sigma_z\right) \end{aligned}$$

となる。

$$E\left[\exp\left(\alpha+(1+\beta)z+\varepsilon\right)\right]=\exp\left(\alpha+(1+\beta)\mu_z+(1+\beta)^2\sigma_z^2/2+\sigma_\varepsilon^2/2\right)$$

であり，$x=\alpha+(1+\beta)z+\varepsilon$ であるから，

$$E\left[\exp\left(\alpha+(1+\beta)z+\varepsilon\right)\right]=E(X)$$

となる。

$\sigma_{yz}=\beta^2\sigma_z^2$ であり，$\sigma_{yz}=\sigma_{xy}-\sigma_y^2$ であるから，

$$\begin{aligned}\mu_z+(1+\beta)\sigma_z^2&=\mu_x-\mu_y+\sigma_{xy}-\sigma_y^2+\sigma_z^2\\&=\mu_x+\sigma_x^2-\left(\mu_y+\sigma_y^2\right)+\sigma_z^2/2\end{aligned}$$

となる。

したがって，

$$\exp\left(\alpha+\sigma_\varepsilon^2/2\right)E\left(\exp\left((1+\beta)z\right)1_{z>0}\right)=E(X)N(d)$$

となる。

同様に，

$$\exp\left(\alpha+\sigma_\varepsilon^2/2\right)E\left(\exp(\beta z)1_{z>0}\right)=\exp\left(\alpha+\sigma_\varepsilon^2/2+\beta\mu_z+\beta^2\sigma_z^2/2\right)N\left(\left(\mu_z+\beta\sigma_z^2\right)/\sigma_z\right)$$

となるので，

$$\exp\left(\alpha+\beta\mu_z+\beta^2\sigma_z^2/2+\sigma_\varepsilon^2/2\right)=E\left[\exp(\alpha+\beta z+\varepsilon)\right]$$

であり，$y=\alpha+\beta z+\varepsilon$ であるから，

$$\exp\left(\alpha+\beta\mu_z+\beta^2\sigma_z^2/2+\sigma_\varepsilon^2/2\right)=E(Y)$$

となる。

$$\left(\mu_z+\beta\sigma_z^2\right)/\sigma_z=\left(\left(\mu_z+(1+\beta)\sigma_z^2\right)/\sigma_z\right)-\sigma_z$$

を利用すると，

$$\exp\left(\alpha+\sigma_\varepsilon^2/2\right)E\left(\exp(\beta z)1_{z>0}\right)=E(Y)N(d-\sigma_z)$$

となる。

証明終

B　補題２の証明

対数正規確率変数 X と Y について，$\ln X=x, \ln Y=y$ とする。正規確率変数 x と y の平均をそれぞれ μ_x,μ_y，分散をそれぞれ σ_x^2,σ_y^2，共分散を σ_{xy} とする。定数 $\psi=\ln\Psi$ とする。2変量確率変数の性質から，

$$E\left(x|y=\psi\right)=\mu_x+\beta\left(\psi-\mu_y\right),\ \mathrm{var}\left(x|y=\psi\right)=\sigma_x^2-\beta^2\sigma_y^2$$

となる。ここで，

$$\beta=\sigma_{xy}/\sigma_y^2$$

である。したがって，

$$
\begin{aligned}
E\left(\exp(x)|y=\psi\right) &= \exp\left(E\left(x|y=\psi\right)+\mathrm{var}\left(x|y=\psi\right)/2\right) \\
&= \exp\left(\mu_x+\sigma_x^2/2+\beta\psi-\left(\beta\mu_y+\beta^2\sigma_y^2/2\right)\right) \\
&= E(X)\Psi^{\beta}/E\left(Y^{\beta}\right)
\end{aligned}
$$

となる。

証明終

■参考文献

[1] Berk, Jonathan B., Richard C. Green and Vasant Naik (1999), "Optimal investment, growth options, and security returns, "*Journal of Finance*, Vol. 54 No. 5.

[2] Bjork, Tomas (1998), *Arbitrage Theory in Continuous Times*, Oxford University Press.

[3] Black, Fischer, and Myron Scholes (1973), "The pricing of options and corporate liabilities, "*Journal of Political Economy*, Vol. 81.

[4] Cochrane, John H. (2001), *Asset Pricing*, Princeton University Press.

[5] Copeland, Tom, and Vladimir Antikarov (2001), *Real Options, A Practitioner's Guide*, TEXERE publishing Limited.（日本語訳『リアル・オプション　戦略フレキシビリティと経営意思決定』東洋経済新報社，2002）

[6] Dixit, A., and R. S. Pindyck (1994), *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press.

[7] Hull, John C. (2000), *Options, Futures, and Other Derivatives*, Forth edition, Prentice Hall.

[8] Jamshidian, Farshid (1989), "An exact bond option formula, "*Journal of Finance*, Vol. 44 No. 1.

[9] Margrabe, W. (1978), "The Value of an Option to Exchange One Asset for Anther," *Journal of Finance*, Vol.33.

[10] McDonald, R., and D. Siegel (1986), "The Value of waiting to investment," *Quarterly Journal of Economics*, Vol.101.

[11] Neftci, Salih N. (2000), *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, Second Edition, Academic Press.

[12] Vasicek, Oldrich A. (1977), "An equilibrium characterization of the term structure," *Journal of Financial Economics*, Vol. 5.

[13] マーサ・アムラム，ナリン・クラティラカ (2001)『リアル・オプション　経営戦略の新しいアプローチ』東洋経済新報社。

[14] 山本大輔・刈屋武昭 (2001)『入門リアル・オプション　新しい企業価値評価の技術』東洋経済新報社。

[15] 飯原慶雄 (2001)「確率的キャッシュフローの評価」『経営論集』54 号，東洋大学経営学部。

[16] 飯原慶雄 (2002)「オプション・ペイオフの期待値計算とその応用」『経営論集』55 号，東洋大学経営学部。