ID	JJF00198

論文名	期間構造モデルの理論的フレームワークに関するマルチンゲール価格理論アプローチからの考察 ―CIRモデルとHJMモデルを中心として―
	On the theoretical framework of term structure models of the interest rate: Focused on CIR and HJM
著者名	赤壁弘康
	Hiroyasu Akakabe
ページ	70-107

雑誌名	経営財務研究
	Japan Journal of Finance
発行巻号	第21巻第1号
	Vol.21 / No. 1
発行年月	2001年6月
	Jun. 2001
発行者	日本経営財務研究学会
	Japan Finance Association
ISSN	2186-3792

■研究ノート

期間構造モデルの理論的フレームワークに関するマルチンゲール価格理論アプローチからの考察
—CIRモデルとHJMモデルを中心として—

赤壁　弘康
(神戸学院大学)

要　旨

Cox-Ingersol-Ross [6] の期間構造モデルとHeath-Jarrow-Morton [12] の期間構造モデルはともに後に続く論文の創出効果が高く，数理ファイナンス論の分野では非常に大きな貢献を成し遂げたが，単一因子によるCIRモデルよりは因子に依存しないHJMモデルのほうが理論的一般性が高いものと見なされる傾向があるようである。また，ボラティリティ係数にのみ依存するHJMモデルは，期間構造派生証券の理論価格を計算する際に，きわめて強力であると考えられているようである。本稿は，マルチンゲール価格理論アプローチから両モデルを詳細に再検討した結果，このような見解が支持し得ないことを主張する。この目的のために，モデルの差異にかかわらず成り立つ金利の期間構造モデルの一般理論を提示する。この議論にもとづいて，前者の観点に対しては，ゼロクーポン債の価格をマルチンゲールにするような同値マルチンゲール測度の存在性・一意性を主張し得るかどうか，あるいはボラティリティ係数が一意であることをモデルの内在的な仮定のみから主張し得るかどうか（ゼロクーポン債の明示的な価格公式の導出プロセス）を検討し，HJMモデルはこの点に関して弱点を持つことを見る。後者の観点に対しては，期間構造派生証券の端的な例としてゼロクーポン債に対するヨーロッパ型コールを取り上げ，その明示的な評価公式を導出し，CIRモデルとHJMモデルにおけるそれぞれの計算コストの比較を行う。結果として得られた評価公式の計算コストは，HJMモデルがはるかに安価であることが確認されるが，コールの明示的評価公式を導出する際の，HJMモデルの特定化に問題があることを見る。

キーワード：単一因子期間構造モデル，ゼロクーポン債の価格，CIR期間構造モデル，HJM期間構造モデル，証券市場均衡理論，マルチンゲール価格理論，Feynman-Kacの公式，Bessel 2乗過程，Girsanovの定理，同値マルチンゲール測度

1　はじめに—本稿の目的と分析方法—

Keynes『一般理論』[19] およびHicks『価値と資本』[13] による経済理論・金融理論からの流動性選好説アプローチは，金利の期間構造の理論的フレームワークに少なからず影響を与えた。しかし少なくともファイナンス論の分野に関しては，金利の期間構造モデルの理論的精緻化の流れは債券によって代表される「定収入証券」の評価ならびにヘッジ化を直接の契機としている（たとえばRoll [24] を参照されたし)。今日，理論的側面においては，期間構造モデルは現代ファイナンス論の理論モデルの中でももっとも成功したもののひとつであるといわれるまでに成熟しており，他方実務の領域では，単一債券ポートフォリオのリスク管理から，担保化抵当債務計画とその評価にまで及ぶ日々のビジネス問題に応用されている。

これまでに提示された代表的な期間構造モデルの分類に関しては，さまざまなバリエーションの期間

構造モデルが「一因子（one-factor)」あるいは「単一因子（single-factor)」期間構造モデルと呼ばれるカテゴリーに分類されている。単一因子という名称は，それらのモデルが任意の時点における金利の全期間構造を，単一の状態変数である短期金利の関数として取り扱っていることにちなんでいる。これに対して，「多因子（multi-factor)」期間構造モデルは，金利の期間構造が短期金利だけでなく他の状態変数の関数として与えられるものをさす(1)。

経済理論の分野でもっとも権威ある雑誌のひとつである*Econometrica*に，きわめて重要な二つの論文が相次いで掲載された。Cox-Ingersoll-Ross [6]（CIR）の期間構造モデルとHeath-Jarrow-Morton [12]（HJM）の期間構造モデルである。CIR期間構造モデルとHJM期間構造モデルはともに後に続く論文の創出効果が高く，数理ファイナンス論の分野で非常に大きな貢献を成し遂げた。

CIRモデルは，連続時間設定における投資家の効用最大化問題から導出されたものであり，証券市場均衡理論の成果を直接適用することが可能で，この意味でミクロ経済学的基礎を有しているということができる。この特徴は他の単一因子期間構造モデルにはないものであり，したがって，CIRモデルには経済理論の観点からも高い評価を与えることができる。一般に因子による期間構造のモデル化においては，基本モデルとして短期金利過程が$r_t=R(X_t, t)$の形の因子構造である場合が取り扱われる。CIRモデルでは何らad-hocな仮定を追加することなく，証券市場均衡と両立する形でこの因子構造が導かれる。これは，恣意的に因子構造が仮定されている他の期間構造モデルにはない，CIRモデルの大きな特徴となっている。

HJM期間構造フレームワークの中では，いわゆる単一因子モデルも多因子モデルもすべて，直接的に金利にではなく限界的な先渡しレートに関して考察し得ることが示されている。いいかえれば，HJM [12]モデルでは，利回り曲線の将来の時間発展が依存する「状態変数」は，ある特定の有限次元状態ベクトルではなく，経常利回り曲線全体となっているのである。HJMモデルのフレームワークを用いれば単一因子であると多因子であるとを問わず経常利回り曲線によって統一的に解釈が可能となる点が，HJMモデルが果たした理論的貢献の一つである。

この意味で，数理ファイナンス論の観点から種種の期間構造モデルのフレームワークを検討する場合，CIRモデルとHJMモデルを取り上げれば十分である場合が少なくない。しかし，上記評価の観点は必ずしも一般に定着しているとは言い難いため，両期間構造モデルをこの観点から理論的に再検討することには大いに意味がある。

さらに

- 純粋理論上の一般的見解として，単一因子によるCIRモデルよりは，因子に依存しないHJMモデルのほうが理論的一般性が高いものと見なされる傾向があるようである。
- 実務・応用に関わる理論的側面からの一般的見解として，ボラティリティ係数にのみ依存するHJMモデルは，期間構造派生証券の理論価格を計算する際に，きわめて強力であると考えられているようである。

(1) 単一因子期間構造モデルの代表例として，Merton [20], Ho-Lee [14], Dothan [8], Brennan-Schwartz [2], Vasicek [26], Cox-Ingersoll-Ross [6] をあげることができる。期間構造モデルの分類については，Duffie [9, Chp.7], Duffie-Kan [10] のサーベイが参考になる。affine期間構造に関してはBrown-Schaefer [3], Björk [4] が参考になる。また，Rogers [22] の数学者の立場からの示唆も理論的に整理する際に参考になる。

これまでの理論的レビューは因子構造によるものが多く（Duffie [9, Chp.7], Duffie-Kan [10]），あるいはCIR・HJMいずれか一方のみを理論的にレビューするにとどまり（Björk [4]），両モデルを上記評価の観点から比較検討しているものはほとんど見当たらない。したがって，理論的側面のみならず実務上も，上の一般的見解が支持し得るものであるか否かという観点から両期間構造モデルを比較検討することには意味がある。

本稿は，マルチンゲール価格理論アプローチからこのような見解が支持できるものであるか否かを検討した結果，この二つの見解はともに支持し得ないと主張するものである。検討の方法は次のとおりである(2)。

前者の純粋理論上の見解に対しては，それぞれのモデルに対する同値マルチンゲール測度の存在性・一意性について検討することになる。後者の実務・応用に関わる理論的側面からの見解に対しては，CIRモデルとHJMモデルにおいて同一の期間構造派生証券の明示的な評価公式を導出し，その計算コストを比較検討することになる。期間構造派生証券の計算コストを比較する目的に照らせば，数多くの派生証券を取り上げることはあまり有効とはいえない。そこで，本稿では，期間構造派生証券として最も代表的なゼロクーポン債に対するヨーロッパ型コールを中心に検討することにする。この二つの見解をつなぐ架け橋として，ゼロクーポン債の明示的価格公式を取り上げる。

この目的を遂行するために，まず第1節において，モデルの差異にかかわらず成り立つ金利の期間構造モデルの一般理論を提示する。すなわち，マルチンゲール価格理論アプローチによって金利の期間構造を理論的にあとづけることから始める(3)。同時に，期間構造モデルの主要応用対象である期間構造派生証券としてゼロクーポン債に対するヨーロッパ型コールと金利スワップを取り上げ，それぞれの評価の一般論を展開する。次に第2節において，CIRモデルをDuffie-Zame [11] による連続時間設定における証券市場均衡と状態価格デフレータの観点から厳密に導出するというアプローチを採る(4)。CIRモデルを理論的に解釈する際にはBessel 2乗過程についての言及を避けて通ることができない。この結果と第1節の議論を考慮すれば，ゼロクーポン債の価格をマルチンゲールにするような同値マルチンゲール測度の存在を仮定したとき，CIRモデルにおいてはゼロクーポン債の明示的な価格公式をモデルの内在的な仮定のみから導出し得ることが確認される。さらに，CIR期間構造派生証券としてゼロクーポン債に対するヨーロッパ型コールを取り上げ，その評価公式を導出する。この評価公式にもとづいて理論価格を計算する場合，計算コストが禁止的に高くなることを主張する。第3節では，先渡しレートに関するHJM期間構造モデルのクラスについて取り扱う(5)。CIRモデル同様，HJMモデルも同値マルチンゲール測度の存在性・一意性が結論される（定理4.1）が，同時に，満期の異なるゼロクーポン債を必要なだけ導入し得るとする仮定2.1に強く依存することが指摘される。さらに，CIRモデルの

(2) 本稿は，数理ファイナンス論の観点から期間構造モデルのフレームワークを考察することを意図しているので，可能な限り厳密・自己完結的な分析を目指す。しかし，読みやすさを考慮して，補題・命題・系の証明は補論にまとめて記すことにする。

(3) この一般理論の段階では，仮定1.1に示したように，同値マルチンゲール測度の存在性を仮定しなければならない。しかし，個々の期間構造モデルにおいては，存在性・一意性は仮定ではなく，証明すべき事項となる。

(4) 均衡からのアプローチではないが，Delbaen [7] はCIRモデルに対する理論的に厳密なアプローチとして参考になる。

(5) HJMモデル以後の理論的発展については，Björk [4] が参考になる。

場合と同様，HJM期間構造派生証券としてゼロクーポン債に対するヨーロッパ型コールを取り上げ，単純化の仮定のもとでその明示的な評価公式を導出する。この評価公式にもとづいて理論価格を計算する場合には，計算コストがBlack-Scholesオプション評価公式の場合と同等のレベルにあることが主張される。

2 金利の期間構造に関する一般理論

2.1 定義と基本的結果

所与の確率空間（Ω, $\mathfrak{F}$, $\mathbb{P}$）上で定義された，ある時間間隔 $[0, T]$ に制約された測度 $\mathbb{P}$ に関する $\mathbb{R}^d$-値標準Brown運動 $B=(B^1, \ldots, B^d)$ を固定する。ただし，$B^i, B^j, i \neq j$ は互いに独立であるとする。また，B に関連する標準フィルトレーション $\mathbb{F}=\{\mathfrak{F}_t : 0 \leq t \leq T\}$ を固定する(6)。

$\int_0^T |r_t| dt < \infty$ となるような適合的短期金利過程 r を所与とする。まずはじめに，時刻 $s>t$ で満期を迎えるゼロクーポン債を考える。定義によって，この債券には時刻 s までいかなる配当も支払われず，時刻 s において固定された一括支払いが提供される(7)。

仮定2.1 各々の満期日 s を持つゼロクーポン債が必要なだけ存在するものとする。

この仮定は特に，HJMモデルにおいて同値マルチンゲール測度 $\mathbb{Q}$ の存在性を証明する際に本質的な役割を果たす。金利の期間構造モデルの関心事のひとつに，この s-満期債券の時刻 t における価格 $\Lambda_{t,s}$ を特徴づけることがある。

裁定が存在しないという条件に関しては，同値マルチンゲール測度が存在するために必要ないくつかの純粋に技術的な条件が必要になる。そこで，存在性については以下のとおり仮定しておく。

仮定2.2 s で満期をむかえるゼロクーポン債の時刻 t における価格を $\Lambda_{t,s}$ で表す。あらゆる実数値 $u \in [0, T]$ に対して

$$\tilde{\Lambda}_{t,u} = \Lambda_{t,u} \exp\left(-\int_0^t r_s ds\right)$$

によって定義される割り引かれた価格過程 $\tilde{\Lambda}_{t,u}$，$0 \leq t \leq u$ がマルチンゲールになるような，$\mathbb{P}$ と同値な確率測度 $\mathbb{Q}$ が存在する。

$\tilde{\Lambda}$ が $\mathbb{Q}$-マルチンゲールであることより

$$\tilde{\Lambda}_{t,u} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\tilde{\Lambda}_{u,u} \middle| \mathfrak{F}_t\right) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\exp - \int_0^u r_s ds \middle| \mathfrak{F}_t\right).$$

ただし，$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\cdot)$ は測度 $\mathbb{Q}$ の下での期待値を表す。したがって，$\Lambda_{t,u}$ は $\mathfrak{F}_t$ 可測であり，次式によって与えられることがわかる。

$$\Lambda_{t,u} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(\int_t^u - r_s ds\right) \middle| \mathfrak{F}_t\right]. \tag{1}$$

(6) しかし，必ずしも $\mathfrak{F}_t$ が B によって生成されるという意味ではない。

(7) 一般性を失うことなく，この一括支払額を1金額単位に等しいとすることができる。このような取扱いは必ずしも本質的なものではない。

$\mathbb{P}$ と同値な確率測度 $\mathbb{Q}$ の下では Radon-Nikodym 導関数 $d\mathbb{Q}/d\mathbb{P}=L_T$ が存在し，時刻 s において非負確率変数 Z で表される有限分散ペイオフを持つ任意の証券に対して $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(Z)=\mathbb{E}(ZL_T)$ が成り立つことは容易にわかる。ペイオフ Z が $\mathfrak{F}_t$ 可測であれば，$L_t=\mathbb{E}(L_T|\mathfrak{F}_t)$ とおくことによって，$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(Z)=\mathbb{E}(ZL_t)$ を得る。このとき，Girsanov の定理より

$$L_t=\exp\left(\int_0^t \xi(s)dB_s-\frac{1}{2}\int_0^t \|\xi(s)\|^2 ds\right),\ \mathbb{P}\text{-a.s.} \tag{2}$$

となるような $\mathbb{R}^d$ 値適合過程 $\xi(t)$，$0\le t\le T$ が存在することがわかる。したがって，有限分散ペイオフ Z を持つ任意の証券の時刻 $t\le s$ における価格は

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(\int_t^s -r_u du\right)Z\middle|\mathfrak{F}_t\right] \tag{3}$$

で与えられることがわかる。なぜなら，(3) で特に $Z=1$ とおけば，(1) より，上式の値は s で満期をむかえるゼロクーポン債の時刻 t における価格 $\Lambda_{t,s}$ であることがわかるからである。二つのインデックスを有する過程 Λ はときに「割引関数」，あるいはより広義に「金利の期間構造」という名で知られている。

定義 2.1（金利の期間構造） s で満期をむかえるゼロクーポン債の時刻 t における価格 $\Lambda_{t,s}$ を金利の期間構造といい，(1) で与えられる。期間構造は「利回り曲線」で表現されることも多い。時刻 $t+\tau$ で満期をむかえるゼロクーポン債に対する連続複利利回り $y_{t,\tau}$ は次式で定義される。

$$y_{t,\tau}=-\frac{\log\left(\Lambda_{t,t+\tau}\right)}{\tau}.$$

期間構造は HJM モデルのように先渡し金利で表現されることもある。

以下の命題は，期間構造に関する一般的な結果であり，適合過程 ξ を経済的に解釈する際に有用である。

命題 2.1　任意の満期 s に対して，次式で定義される $\mathbb{R}^d$ 値適合過程 σ_t^s，$0\le t\le s$ が存在する。すなわち

$$\frac{d\Lambda_{t,s}}{\Lambda_{t,s}}=\left(r_t-\sigma_t^s\xi(t)\right)dt+\sigma_t^s dB_t,\qquad t\in[0,\ s]. \tag{4}$$

証明は補論を参照されたし。

注意 2.1　$\mathbb{Q}$ の存在性は仮定されているが，一意であるとは限らない。したがって，適合過程 σ^s の存在性は主張し得るが，必ずしも一意であるとは限らない。σ^s の一意性を主張し得るか否かは，ゼロクーポン債も含んだ背景の証券市場均衡が不確実性の源泉である $\mathbb{R}^d$ 値標準 Brown 運動をスパンし得るか否か，すなわち完備証券市場均衡の存在性・一意性，を問題にしなければならない（Duffie［9, pp.105-6］あるいは赤壁［28，第4(1)節］を参照されたし）が，これは個別の期間構造モデルごとにそれぞれ検討する必要がある。

これまでに，同値マルチンゲール速度 $\mathbb{Q}$ の下での短期金利 r の振るまいを記述するいくつかの代替的なモデルが展開されている。そのいずれの場合においても，多くの場合，r は $\mathbb{Q}$ の下での $\mathbb{R}^d$ 値標準

Brown 運動 W に関してモデル化されている。

注意 2.2 概念上は，r_t は時刻 t における「無危険」債券に対する連続複利金利である。債券価格は，時刻 t でなされた1金額単位の投資を t から s までの時間，連続的に短期金利で再投資した場合の時刻 s における市場価値 $\exp\left(\int_t^s r_u du\right)$ であるとすることによって定式化される。通常のマルチンゲール価格理論アプローチによる資産価格評価理論では，同値マルチンゲール測度は同時にリスク中立確率でもあった。しかし，通常の資産価格評価理論とは違って期間構造モデルにおいては，r は適合過程とされているから，いわゆる「無危険」収益率ではない（この意味で，「無危険」債券の価格過程 S^0 は無危険ではないという用語上の矛盾を生ずる）。しかしながら，以下のように解釈することができる。すなわち第一に，(4) の右辺第一項は債券の（危険）収益率を表しており，したがって，$-\sigma_t^s\xi(t)$ は債券の平均利回りと（危険）収益率の差であるから，$\xi(t)$を一種のリスク・プレミアムと解釈することができる。これによって，金利の期間構造に対する Keynes [19]・Hicks [13] の流動性選好説との関連が復元される。また，$W_t = B_t - \int_0^t \xi(s)ds$ で定義される $\mathbb{R}^d$ 値過程 W は $\mathbb{Q}$-標準 Brown 運動であるから（Girsanov の定理の結果），(4) は

$$\frac{d\Lambda_{t,s}}{\Lambda_{t,s}} = r_t dt + \sigma_t^s dW_t,$$

すなわち

$$\Lambda_{t,s} = \Lambda_{0,s}\exp\left(\int_0^t r_u du + \int_0^t \sigma_u^s dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t \left\|\sigma_u^s\right\|^2 du\right) \tag{4'}$$

となる（満期 s における一括支払額が1金額単位に等しいとすることができれば，$\Lambda_{0,s} = 1$ となる）。この結果から，過程 r のみで定義される債券の価格は相対的な意味で無危険であると見なすことができ，これまでどおり $\mathbb{Q}$ を「リスク中立」確率と呼んでも差し支えないことがわかる。このことからさらに，「無危険」債券の価格過程 S^0 を，一般性を失うことなく

$$S_t^0 = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right), \quad S_0^0 = 1 \tag{5}$$

とすることができる。

2.2 期間構造派生証券の例

以下で，期間構造派生証券の評価を一般的に特徴づけることにする。ここでいう期間構造派生証券とは，ペイオフが期間構造に依存するような証券を意味する。ここでは，このような期間構造派生証券の例として，ゼロクーポン債に対するヨーロッパ型コールオプションの評価と金利スワップを取り上げることにする。

例 2.1（ゼロクーポン債に対するヨーロッパ型コール） 満期が T であるゼロクーポン債に対して，行使価格が K で満期 $s \leq T$ のヨーロッパ型コールオプションを考える。満期 s におけるオプションの価値は $(\Lambda_{s,T} - K)^+$ で与えられる。通常のオプション評価アプローチと同様，このコールが無危険資産とゼロクーポン債でヘッジ化・複製可能であると考える。時刻 t における取引戦略 ϕ は，無危険債券の量 H_t^0 とゼロクーポン債の保有数 H_t の組 $\phi = (H_t^0, H_t) \in \mathbb{R}^2$ によって与えられる。先のノーテーションを

用いれば，この取引戦略の時刻tにおける価値V_tは，$V_t = H_t^0 S_t^0 + H_t \Lambda_{t,T}$によって与えられる。自己資金調達可能条件は

$$dV_t = H_t^0 dS_t^0 + H_t d\Lambda_{t,T}$$

となる。ただし，積分可能条件$\int_0^T |H_t^0 r_t| \mathrm{d}t < \infty$，$\int_0^T \|H_t \sigma_t^T\|^2 dt < \infty$が課せられる。また，$\phi$が自己資金調達可能であり，割引価値$\tilde{V}_t$がすべての$t$に対して非負，かつ，$\sup_{t \in [0,\, T]} \tilde{V}_t$が$\mathbb{Q}$の下で2乗可積分であるとする。

より一般的に，次の命題が成り立つ。

命題2.2　すべての$t \in [0, s]$，$s < T$に対してほとんど確実に$\sup_{0 \le t \le T} |r(t)| < \infty$，かつ，$\sigma_t^T \neq 0$が成り立つものとする。$x$を$xe^{-\int_0^s r_u du}$が$\mathbb{Q}$-2乗可積分となるようなある$\mathfrak{I}_s$可測な確率変数であるとする。このとき，時刻$s$における価値$V_s$が条件付き請求権$x$に等しくなるような取引戦略$\phi$が存在する。この取引戦略$\phi$は自己資金調達可能（したがって，$x$の複製戦略）であり，割引価値$\tilde{V}_t$がすべての$t$に対して非負，かつ，$\sup_{t \in [0,\, T]} \tilde{V}_t$が$\mathbb{Q}$の下で2乗可積分となる。この取引戦略の時刻$t$における価値$V_t$，$t \le s$は

$$V_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[x \exp\left(-\int_t^s r_u du \right) \middle| \mathfrak{I}_t \right]$$

によって与えられる。

証明は補論を参照されたし。命題2.2において$x = (\Lambda_{s,T} - K)^+$とおけば（$\Lambda_{s,T}$が$\mathfrak{I}_s$可測であるから，$x$が$\mathfrak{I}_s$可測であることは明らか），コールが「無危険」資産とゼロクーポン債によって複製可能であることを結論するとともに，コールの「リスク中立」的な評価を得る。

次に，金利スワップの評価を考察する。

例2.2（金利スワップ）　ある期間構造派生証券が$\mathbb{R} \times [0, T]$で定義されている可測な実数値関数hおよびgで定義されたペイオフを有するものとする。ただし，任意の時刻$t \in [0, T]$における配当率は$h(r_t, t)$で，ある特定時刻$\tau \le T$における終端ペイオフは$g(r_\tau, \tau)$で特定化する。同値マルチンゲール測度の定義から，このような証券の時刻tにおける価格は

$$F(r_t, t) \equiv \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\int_t^\tau \varphi_{t,s} h(r_s, s) ds + \varphi_{t,\tau} g(r_\tau, \tau) \middle| \mathfrak{I}_t \right]$$

となる。ここで$\varphi_{t,s} = \exp(-\int_t^s r_v dv)$とする。金利スワップはこのタイプの派生証券であり，配当率$h(r_t, t) = r_t - r^*$を支払う財務契約として定義される。ここで，r^*は時刻ゼロで合意されている固定金利である。

このとき，次の命題が成り立つ。

命題2.3　時刻tにおける金利スワップの価値は$v_t = 1 - \Lambda_{t,\tau} - r^* \int_t^\tau \Lambda_{t,s} ds$で与えられる。$v_t = 0$であればこのスワップは「アット・ザ・マネー」の状態にある。この場合には，経常スワップ率が$r_t^* = (1 - \Lambda_{t,\tau}) / \int_t^\tau \Lambda_{t,s} ds$で与えられる。

証明は補論を参照されたし。

3 Cox-Ingersoll-Ross モデル

単一因子期間構造モデルの中でも最も著名なもののひとつに，Cox-Ingersoll-Ross [6]（CIR）モデルがある。ここでは，まずCIRモデルを一般均衡論の立場から導出することから始める。

一般に因子による期間構造のモデル化においては，基本モデルとして短期金利過程が $r_t = R(X_t, t)$ の形の因子構造である場合が取り扱われる。CIRモデルでは何ら ad-hoc な仮定を追加することなく，証券市場均衡と両立する形でこの因子構造が導かれる。これは，恣意的に因子構造が仮定される他の期間構造モデルにはない，CIRモデルの大きな特徴となっている。

3.1 証券市場均衡理論からのCIR期間構造モデルの導出

この節では，Cox-Ingersoll-Ross [6] 期間構造モデルを証券市場の一般均衡から正当化することを試みる。資本ストック過程 K を有するある生産技術からの最適な消費過程 δ を含んだ代表的市場参加者の確率制御問題の解を出発点とする。この問題の解から出発して，次に，証券市場均衡理論（たとえば Duffie-Zame [11] を参照）と共通の一般均衡論のフレームワークで分析され，自然な形で短期金利過程の因子構造 $r_t = R(X_t, t)$ が (13) のように導かれる。CIR期間構造モデルがこのような経済学的アプローチから導出されるという特徴は，他の期間構造モデルにない，経済理論の観点からも高い評価を与え得る点となっている。

所与の割引率 $\rho \in (0, \infty)$ に関して

$$U(c) \equiv \mathbb{E}\left[\int_0^T e^{-\rho t} \log(c_t) dt\right], \qquad c \in L_+ \tag{6}$$

とおく。ここで，L_+ は非負適合過程の空間を表す(8)。経済の単一参加者は（6）で定義される効用関数 $U : L_+ \to \overline{\mathbb{R}}$ を持つ。

単純化のために，Brown 運動は1次元であるとする。

$\mathcal{C}$ によって，すべての $t \geq 0$ に対してほとんど確実に $\int_0^T c_t dt < \infty$ を満たす非負の適合消費過程の空間を表すことにする。$\mathcal{C}$ に属するすべての c に対して，資本ストック過程 K^c は

$$dK_t^c = \left(hK_t^c Y_t - c_t\right) dt + K_t^c \varepsilon \sqrt{Y_t} dB_t; \qquad K_0^c = x > 0 \tag{7}$$

によって定義される。ここで，Y は所与の生産技術における資本ストックの成長率を規定する状態変数（適合過程），h, ε は $h > \varepsilon^2$ となるような厳密に正のスカラーである。h を適当に解釈することによって，

(8) オリジナルのCIR [6] モデルでは HARA 型の効用関数

$$e^{-\rho t}\left[\frac{c_t^\gamma - 1}{\gamma}\right]$$

を採用している。対数効用関数は，後で見るとおり稲田条件をはじめとしてその導関数に要請されている滑らかさが十分ではないから，伝統的な確率制御モデルの技術的なフレームワークに合致しない。しかし，この点を別にすれば，目的のCIR期間構造モデルを直接に導けるという利点を持つ。

(7) を，いわゆる「資本ストック調整原理」にもとづくSamuelson [25] 流加速度モデルの確率過程版とみることができる。当面の目的は，所与の生産技術における資本ストックの成長率が，$2b > k^2$であるような厳密に正のスカラー κ, b, k に関して

$$dY_t = (b - \kappa Y_t)dt + k\sqrt{Y_t}dB_t; \qquad Y_0 > 0 \tag{8}$$

で表される確率微分方程式の解である適合過程Yによって規定されるとき，最適消費計画δと最適資本ストック過程Kを決定することにある。しかしこのアプローチを正当化するためには，適合過程Yの存在性と非負性を示す必要がある。しかし，これはそれほど自明ではない。まずこれを示すことにする。

補題3.1 過程Yは存在し，非負である。

証明は補論を参照されたし。

補題3.2 すべての$t \in [0, T]$ に対して$K_t^c \geq 0$を制約とする代表的市場参加者の最適消費計画問題

$$V(x, y) = \sup_{c \in \mathcal{C}} \mathbb{E}\left[\int_0^T e^{-\rho t} \log(c_t)dt\right]$$

を考える。

このとき，最適資本ストックKは

$$dK_t = (K_t h Y_t - \delta_t)dt + K_t \varepsilon \sqrt{Y_t}dB_t; \qquad K_0 > 0 \tag{9}$$

によって定義される伊藤過程となる。ここで最適消費計画δは

$$\delta_t = \frac{\rho K_t}{1 - e^{-\rho(T-t)}}, \qquad t \in [0, T] \tag{10}$$

である。

証明は補論を参照されたし。補題3.1から，以下のように最適資本ストック過程Kの存在性を主張することができる。

補題3.3 (9)–(10) によって定義される過程Kの存在性は保証される。

証明は補題を参照されたし。

単一参加者の賦存過程eが，(10) で定義される資本ストックの最適「引き出し」率δであると仮定することから始める。このように仮定すれば，Duffie-Zame [11, Theorem 1 (p.1287)] の証券市場均衡の結果と対応する結果を構成することができる(9)。$u_\lambda(x, t) = e^{-\rho t} \log x$である単一参加者（$\lambda = 1$）のケースに対して，Duffie-Zame [11] の仕方で定義されるように

$$p_t = u_{\lambda c}(\delta_t, t) = \frac{e^{-\rho t}}{\delta_t}, \qquad t \in [0, T] \tag{11}$$

(9) すでに指摘しているように，ここで述べる均衡は伝統的な確率制御モデルの技術的なフレームワークに合致しない。というのも対数効用関数には，稲田条件をはじめとしてその導関数に要請されている滑らかさが十分ではないからである。それでも，技術的な諸条件が満たされなくともモデルの本質的な局面が侵害されることはないという仮定の下で，議論を進めていくことにする。

を状態価格デフレータ p に採用することにする。このとき，証券の実物価格過程 $\hat{S}=S/p$ は実物「引き出し」率過程 $\hat{\delta}=\delta/p$ に対して

$$\hat{S}_t=\frac{1}{p_t}\mathbb{E}\left(\int_t^T p_s\hat{\delta}_s ds\middle|\Im_t\right),\qquad t\in[0,\ T] \tag{12}$$

で与えられることがわかる(10)。

このとき，状態価格デフレータと短期金利との関係（たとえば赤壁［28, p.146］を参照）を用いれば，短期金利過程 r は，次式で与えられる。

$$r_t=\frac{-\mu_p(t)}{p_t}=\left(h-\varepsilon^2\right)Y_t. \tag{13}$$

注意 3.1　上のことは，CIRモデルでは何らad-hocな仮定を追加することなく，証券市場均衡と両立する形で因子構造 $r_t=R(X_t,\ t)$ が導かれることを示している。

定理 3.1　短期金利過程 r は次の確率微分方程式の解である。

$$dr_t=\kappa\left(r^*-r_t\right)dt+\sigma_r\sqrt{r_t}dB_t. \tag{14}$$

ただし，$r^*=b\left(h-\varepsilon^2\right)/\kappa$，$\sigma_r=k\sqrt{h-\varepsilon^2}$ である。

この定理3.1の（14）はCIR［6, eqn.(16)(p.391)］と本質的に同一である。しかし以下の証明によるその導出方法は，CIR［6］とは異なることに注意されたい。

証明　伊藤の補題を援用することによって，(9)，(10) から次式を得る。

$$dK_t=K_t\left(hY_t-\frac{\rho}{1-e^{-\rho(T-t)}}\right)dt+K_t\varepsilon\sqrt{Y_t}dB_t,$$

$$p_t=\frac{e^{-\rho t}}{\delta_t}=\frac{e^{-\rho t}\left(1-e^{-\rho(T-t)}\right)}{\rho K_t}.$$

p_t に対して伊藤の補題を適用して

$$\begin{aligned}dp_t&=-\frac{e^{-\rho t}}{K_t}dt-\frac{e^{-\rho t}\left(1-e^{-\rho(T-t)}\right)}{\rho K_t}\frac{dK_t}{K_t}+\frac{1}{2}\frac{e^{-\rho t}\left(1-e^{-\rho(T-t)}\right)}{\rho K_t}\frac{2}{K_t^2}K_t^2\varepsilon^2Y_t^2dt\\&=\left(\varepsilon^2-h\right)p_tY_tdt-p_t\varepsilon\sqrt{Y_t}dB_t.\end{aligned} \tag{15}$$

短期金利過程 r は，(13) で与えられる。したがって，(8) から

(10)　Duffie-Zame［11, eqn.(6)(p.1287)］を参照されたし。

$$
\begin{aligned}
dr_t &= \left(h-\varepsilon^2\right)dY_t \\
&= \left(h-\varepsilon^2\right)\left(b-\kappa Y_t\right)dt + \left(h-\varepsilon^2\right)k\sqrt{Y_t}\,dB_t \\
&= \kappa\left(\frac{\left(h-\varepsilon^2\right)b}{\kappa} - \left(h-\varepsilon^2\right)Y_t\right)dt + \left(h-\varepsilon^2\right)k\sqrt{Y_t}\,dB_t \\
&= \kappa\left(r^*-r_t\right)dt + k\sqrt{\left(h-\varepsilon^2\right)}\sqrt{\left(h-\varepsilon^2\right)Y_t}\,dB_t.
\end{aligned}
$$

したがって，$r^* = b\left(h-\varepsilon^2\right)/\kappa$，$\sigma_r = k\sqrt{h-\varepsilon^2}$ とすれば，(14) を得る。 □

$r_t > r^*$ であれば r のずれ項は負であり，$r_t < r^*$ であれば r のずれ項は正になる。それゆえ，r は r^* に関して反転する「平均反転」過程と見ることができる。以下では，この点をより正確に検証することにする。

命題3.1（CIR期間構造モデルの「平均反転」性） $r_t > r^*$ であれば r のずれ項は負であり，$r_t < r^*$ であれば r のずれ項は正になる。それゆえ，測度 $\mathbb{P}$ の下で短期金利過程 r は r^* に関して反転する「平均反転」過程と見ることができる。

証明は補論を参照されたし。

いくつかのタイプの期間構造派生証券を評価するためには，同値マルチンゲール測度の下で短期金利過程 r を評価できれば十分であることがある[11]。このためには状態価格デフレータ p の明示的な評価が必要になる。これは以下の補題によって与えられる。

補題3.4 状態価格デフレータ p の明示的な評価は以下のとおりである。

$$
p_t = p_0 \exp\left(\frac{h-\varepsilon^2/2}{\varepsilon^2-h}\int_0^t r_s ds - \frac{\varepsilon}{\sqrt{h-\varepsilon^2}}\int_0^t \sqrt{r_s}\,dB_s\right). \tag{16}
$$

証明は補論を参照されたし。補題3.4から以下の命題を得る。

補題3.5 CIR期間構造モデルにおいては，必要な積分可能性条件の下で，同値マルチンゲール測度 $\mathbb{Q}$ の密度過程 ξ は

$$
\begin{aligned}
\xi_t &= \exp\left(\int_0^t r_s ds\right)\frac{p_t}{p_0} \\
&= \exp\left(\frac{\varepsilon^2/2}{\varepsilon^2-h}\int_0^t r_s ds - \frac{\varepsilon}{\sqrt{h-\varepsilon^2}}\int_0^t \sqrt{r_s}\,dB_s\right)
\end{aligned} \tag{17}
$$

で与えられる。また，同値マルチンゲール測度 $\mathbb{Q}$ の下での標準Brown運動 W は次式で定義される。

$$
dW_t = dB_t + \frac{\varepsilon}{\sqrt{h-\varepsilon^2}}\sqrt{r_t}\,dt. \tag{18}
$$

(11) しかしゼロクーポン債に対するオプションの評価では，$\Lambda_{t,s}$ の明示的な表現が必要になる。これは後述の期間構造偏微分方程式で導出する。

証明は補論を参照されたし。この補題から，同値マルチンゲール測度 $\mathbb{Q}$ の下で，短期金利過程 r に関して次のような2乗根の平均反転的な評価式を得る。

$$\begin{aligned} dr_t &= \left\{b\left(h-\varepsilon^2\right)-\kappa r_t\right\}dt+\sigma_r\sqrt{r_t}dB_t \\ &= \left\{b\left(h-\varepsilon^2\right)-\kappa r_t\right\}dt+\sigma_r\sqrt{r_t}\left\{dW_t-\frac{\varepsilon}{\sqrt{h-\varepsilon^2}}\sqrt{r_t}dt\right\} \\ &= \left\{b\left(h-\varepsilon^2\right)-(\kappa+k\varepsilon)r_t\right\}dt+\sigma_r\sqrt{r_t}dW_t. \end{aligned}$$

定理3.2（CIR期間構造モデル） 同値マルチンゲール測度 $\mathbb{Q}$ の下で，短期金利過程 r に関して次のような評価式

$$\begin{aligned} dr_t &= \kappa(r^*-r_t)dt+\sigma_r\sqrt{r_t}\left(dW_t+\frac{\varepsilon}{\sqrt{h-\varepsilon^2}}\sqrt{r_t}dt\right) \\ &= \left[b\left(h-\varepsilon^2\right)-(k\varepsilon+\kappa)r_t\right]dt+\sigma_r\sqrt{r_t}dW_t. \end{aligned} \tag{19}$$

を得る。測度 $\mathbb{Q}$ の下で短期金利過程 r は以下で定義される r^{**}

$$r^{**}\equiv\frac{b\left(h-\varepsilon^2\right)}{k\varepsilon+\kappa}=r^*\frac{\kappa}{k\varepsilon+\kappa}<r^*$$

に関して「平均反転」性を持つ。

証明 測度 $\mathbb{Q}$ の下での「平均反転性」は測度 $\mathbb{P}$ の下での命題を準用できる。必要な計算と証明は上述のとおり。 □

3.2 CIR期間構造偏微分方程式の解としてのCIRゼロクーポン債価格

単一因子モデルであればいかなるものであっても，偏微分方程式と確率微分方程式のあいだに成り立つFeynman-Kac関係を利用すれば，期間構造を（明示的にできなければ数量的に）計算することができることが知られている。満期日 T を固定すれば，(1) から期間構造偏微分方程式と呼ばれる以下のような偏微分方程式を得る。補論A.1.1のFeynman-Kacアプローチが要求する μ と σ に関する技術的な諸条件の下では，その解は存在して一意であることが知られている。

定理3.3（期間構造偏微分方程式） (1) の解過程である r は非負過程であり，かつ μ，σ が x に関するLipschitz条件を満たし，導関数 μ_x，σ_x，μ_{xx}，σ_{xx} が連続で x に関する成長条件を満たすものとする。

このとき，すべての t に関して

$$\Lambda_{t,T}=f(r_t,\ t) \tag{20}$$

が成り立つ。ただし，$\Lambda_{t,T}$ は (1) によって定義される価格過程を，$f\in C^{2,1}(\mathbb{R}\times[0,T))$ は偏微分方程式

$$\mathfrak{D}f(x,\ t)-xf(x,\ t)=0,\qquad (x,\ t)\in\mathbb{R}\times[0,\ T) \tag{21}$$

の境界条件

$$f(x,\ T)=1, \qquad x\in\mathbb{R} \tag{22}$$

の下での一意な解を表す。ここで微分作用素 $\mathfrak{D}$ は

$$\mathfrak{D}f(x,\ t)=f_t(x,\ t)+f_x(x,\ t)\mu(x,\ t)+\frac{1}{2}f_{xx}(x,\ t)\sigma^2(x,\ t)$$

で定義される。

定理3.3の条件は，(20)，(21)，(22) が首尾一貫したものになるための十分条件である。CIR期間構造モデルはLipschitz条件を満たさないため，この定理を直接適用することができない。しかし，この諸条件は必ずしも必要ではなく，たとえば補論A.1.2の山田・渡辺の一意性定理（定理A.1）を利用することによって，既に見たように（実次元Bessel 2乗過程によって r の存在性と一意性を主張した命題3.1の証明を参照されたし），存在性と一意性は保証される。

μ，σ が t に依存しなければ，$f(r_0, t)$ を債券価格 $\Lambda_{0,T-t}$ としてみなすことができる。この場合には単一の関数 f が任意の時刻における全期間構造を表すことになる。

$r_0>0$ が仮定され，$[0,\ \infty)$ の範囲にある短期金利 x に対してのみ (21)–(22) を適用するものとする。このとき，定理3.3の系として，以下を主張することができる。

系3.1（CIR期間構造偏微分方程式の解） CIRモデル (14) に関しては，期間構造偏微分方程式 (21)–(22) の解が

$$f(x,\ t)=H_1(T-t)\exp\left[-H_2(T-t)x\right] \tag{23}$$

で与えられる。ここで

$$H_1(t)=\left[\frac{2\gamma e^{(\gamma+\kappa)t/2}}{(\gamma+\kappa)(e^{\gamma t}-1)+2\gamma}\right]^{2\kappa\sigma^*/\sigma_r^2}, \tag{24}$$

$$H_2(t)=\frac{2(e^{\gamma t}-1)}{(\gamma+\kappa)(e^{\gamma t}-1)+2\gamma} \tag{25}$$

であり，$\gamma=(\kappa^2+2\sigma_r^2)^{1/2}$ とする。

それゆえ，CIRモデルによる満期 T のゼロクーポン債の時刻 t における価格 (1) は

$$\Lambda_{t,T}=H_1(T-t)\exp\left[-H_2(T-t)r_t\right] \tag{26}$$

のように明示的に表現することができる。

証明は補題を参照されたし。この系は [6, eqn.(6)(p.393)] と本質的に同じものである。しかし彼ら自身は証明を与えていない。

注意3.2 (26) と (4′) との比較から明らかなように，時刻 t におけるCIR期間構造モデルにおけるゼロクーポン債の価格 $\Lambda_{t,T}$ は適合過程 r_t の時刻 t における値とゼロクーポン債の満期までの残り時間 $(T-t)$ にのみ依存することを示している。また，補題3.1と (13) から，(4′) における適合過程 (σ_t^s) の一意性は明らかである。

3.3 CIR期間構造派生証券としてのヨーロッパ型コールの評価

満期がTのゼロクーポン債に対して書かれた，満期$s \le T$で行使価格Kのヨーロッパ型コールオプションを評価する問題を考察する。命題2.2の証明において，コールの複製戦略はすでに明らかにされている。したがって，明示的なコール価格を導出することに考察を集中することができる。

コールの終端ペイオフは$(\Lambda_{s,T} - K)^+$で表されるから，時刻0におけるコールの価格は

$$C_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[(\Lambda_{s,T} - K)^+ \exp\left(-\int_0^s r(u)du\right)\right]$$

によって与えられる。ここでは，上式をさらに展開して，Black-Scholes公式に対応する公式を導出することが目的である。記号を節約するために，CIRモデル (19) を

$$dr_t = \left(a - (\kappa + \alpha\sigma_r)r_t\right)dt + \sigma_r\sqrt{r_t}\,dW_t \tag{27}$$

と書くことにする。すなわち， $a = b(h - \varepsilon^2)$， $\alpha = \varepsilon / \sqrt{h - \varepsilon^2}$ とする。

結論を記せば以下のとおりである。

命題3.2（CIR期間構造ヨーロッパ型コール価格） 満期がTのゼロクーポン債に対して書かれた，満期$s \le T$で行使価格Kのヨーロッパ型コールオプションの時刻0における価格C_0は

$$C_0 = \Lambda_{0,T}\Psi_{4a/\sigma_r^2,\zeta_1}\left(\frac{r^*}{L_1}\right) - K\Lambda_{0,s}\Psi_{4a/\sigma_r^2,\zeta_2}\left(\frac{r^*}{L_2}\right)$$

で与えられる。ただし，$\Psi_{\delta,\zeta}(\cdot)$ は自由度δで，非心母数ζの非心χ^2分布を表す(12)。また，非心母数ζ_1, ζ_2はそれぞれ

$$\zeta_1 = \frac{8r_0\hat{\gamma}^2 e^{\hat{\gamma}s}}{\sigma_r^2(e^{\hat{\gamma}s} - 1)\left(\hat{\gamma}(e^{\hat{\gamma}s} + 1) + \left(\sigma_r^2\hat{H}_2(T - s) + b^*\right)(e^{\hat{\gamma}s} - 1)\right)},$$

$$\zeta_2 = \frac{8r_0\hat{\gamma}^2 e^{\hat{\gamma}s}}{\sigma_r^2(e^{\hat{\gamma}s} - 1)\left(\hat{\gamma}(e^{\hat{\gamma}s} + 1) + b^*(e^{\hat{\gamma}s} - 1)\right)}$$

で与えられる。ただし， $b^* = \kappa + \sigma_r\alpha, \hat{\gamma} = \sqrt{(b^*)^2 + 2\sigma^2}$ である。関数 $\hat{H}_2$ は，系3.1 (24) で与えられたH_2においてκをb^*に，γを$\hat{\gamma}$に置き換えたもの

$$\hat{H}_2(t) = \frac{2(e^{\hat{\gamma}t} - 1)}{\hat{\gamma} - b^* + e^{\hat{\gamma}t}(\hat{\gamma} + b^*)}$$

によって与えられる。また同様に，関数 $\hat{H}_1(\cdot)$ を

(12) 非心χ^2分布については、たとえば竹内 [30, p.112] や『岩波数学辞典』[31, 338.B] を参照されたし。

$$\hat{H}_1(t)=\left(\frac{2\hat{\gamma}e^{t(\hat{\gamma}+b^*)/2}}{\hat{\gamma}-b^*+e^{\hat{\gamma}t(\hat{\gamma}+b^*)}}\right)^{2a/\sigma_r^2}$$

によって定義すれば（(25)を参照されたし），r^* は

$$r^*=\frac{\log\hat{H}_1(T-s)-\log(K)}{\hat{H}_2(T-s)}$$

によって与えられる。L_1, L_2 はそれぞれ

$$L_1=\frac{\sigma_r^2}{2}\frac{e^{\hat{\gamma}s}-1}{\hat{\gamma}(e^{\hat{\gamma}s}+1)+\left(\sigma_r^2\hat{H}_2(T-s)+b^*\right)(e^{\hat{\gamma}s}-1)},\quad L_2=\frac{\sigma_r^2}{2}\frac{e^{\hat{\gamma}s}-1}{\hat{\gamma}(e^{\hat{\gamma}s}+1)+b^*(e^{\hat{\gamma}s}-1)}$$

によって与えられる。

証明は補論を参照されたし。この命題は [6, Sec.4 (pp.396-7)] と本質的に同じものである。しかし彼らは証明を記していない。

注意 3.3 Black-Scholes オプション公式との形式的対応はつくものの，非心χ^2分布に依存するこの結果は標準正規分布関数Nのみに依存する Black-Scholes 公式よりはるかに複雑で，計算機のコストがほとんど禁止的なまでに膨大になることが予想される(13)。CIR モデルは，論理的に厳密であるにもかかわらず，HJM モデルに比べて実務家に利用されることが少ないように思われる。それは，この公式の複雑性・計算コストが原因の一つであると考えられるからである。

4 Heath-Jarrow-Morton モデル

CIR モデルはもちろん，一般に因子による期間構造のモデル化においては，因子構造の基本モデルとして短期金利過程が $r_t=R\ (X_t,\ t)$ の形である場合が取り扱われる。ここで（ある同値マルチンゲール測度の下で）X はある所与の確率微分方程式の解である。単一因子の場合には，通常，$r_t=X_t$ とされる。

このアプローチには有限次元「状態空間」のみを取り扱えばよいという利点がある。この利点を利用すれば，この状態空間アプローチを用いて，偏微分方程式の解としてある種の派生証券の価格を計算することができる。

他方，Brennan-Schwartz [2] をはじめとして，長短金利の乖離をモデル化する多因子モデルを開発した研究がある。しかし残念ながら，モデルをより複雑にするこの方向の研究は，ゼロクーポン債や派生証券の評価において明示的な偏微分方程式の解・公式を導出することに成功していない。

これに代わり得るアイデアとして，Ho-Lee [14] の離散時間モデルを契機に，全利回り曲線を状態変数とする研究が現れた。このアイデアは，連続時間設定である HJM モデルの本質部分でもある。

HJM モデルの際立った特徴として，同値マルチンゲール測度 $\mathbb{Q}$ の下では先渡し率の確率分布がボラ

(13) 非心χ^2分布の密度関数は，χ^2分布の密度関数の自由度に関する重み付き無限級数として与えられる（『岩波数学辞典』[31, 338.B] を参照されたし）。

ティリティ関数σにのみ依存するということがあげられる。したがって，HJM 期間構造派生証券の価格もσにのみ依存することになる。この特徴によって，Black-Scholes オプション評価公式と同様，計算機によって期間構造派生証券の価格を計算することが可能になり，HJM モデルが理論家のみならず実務家にも広く受け入れられる要因となった。しかし以下では，このような計算可能性が理論の一般性を犠牲にしてはじめて得られるものであることが確認される。

4.1 先渡し率とHJMゼロクーポン債価格

この節では，HJM モデルの基本構成要素を以下の補題に要約する。

補題4.1 時刻sで満期をむかえ時刻τで引渡しのあるゼロクーポン債の時刻tにおける（$s \geq \tau \geq t$）先渡し価格は，（無裁定の状況では）$\Lambda_{t,s}/\Lambda_{t,\tau}$，すなわち満期日と引渡し日のそれぞれに対するゼロクーポン債の価格比，によって与えられる。また，先渡し価格に関連した「先渡し率」Φを

$$\Phi_{t,\tau,s} \equiv \frac{\log(\Lambda_{t,\tau}) - \log(\Lambda_{t,s})}{s-\tau} \tag{28}$$

によって定義する(14)。「瞬間先渡し率」fを，各々の時刻tと将来の引渡し日$\tau \geq t$に関するΦの極限（存在すれば）として

$$f(t,\ \tau) = \lim_{s \downarrow \tau} \Phi_{t,\tau,s}. \tag{29}$$

で定義する(15)。sで満期をむかえるゼロクーポン債の時刻tにおける価格$\Lambda_{t,s}$は

$$\Lambda_{t,s} = \exp\left(-\int_t^s f(t,\ u)du\right) \tag{30}$$

によって与えられる。

証明は補論を参照されたし。(28)–(29) は期間構造から瞬間先渡し率が決定されることを示しているのに対して，(30) は期間構造が瞬間先渡し率から復元されることを示している。

短期金利の非負性が仮定されれば，以下の命題が成り立つ。

命題4.1 すべてのtに対して$r_t \geq 0$であれば，先渡し率$\Phi_{t,\tau,s}$および瞬間先渡し率$f(t,\ \tau)$はともに非負である。

証明は補論を参照されたし。

4.2 HJMモデルにおける同値マルチンゲール測度の存在性・一意性とHJM期間構造モデル

先渡し率の確率モデルfを所与とすれば，$r_t = f(t,\ t)$が短期金利過程rを定義するものと仮定することができる。これは，満期が限りなくゼロに近づくときの債権利回りの極限として，r_tを取り扱うことができるということを意味している。ある技術的な諸条件の下では，この仮定が正当化される。

次の仮定はHJM 期間構造モデルにおいて，最も本質的な仮定である。

(14) これは，先渡しで購入した債券の連続複利利回りとみなすことができる。

(15) したがって，瞬間先渡し率が存在するための必要十分条件は，すべてのtに対して割引$\Lambda_{t,s}$がsに関して微分可能であることである。

仮定 4.3（先渡し率に関するHJMモデル） 先渡し率に関するHJMモデルは，各々の固定された満期 s に対して

$$f(t,s)=f(0,s)+\int_0^t \alpha(u,s)du+\int_0^t \sigma(u,s)dB_u, \quad t\le s \tag{31}$$

で与えられる。ここで，$\{\alpha(t,s):0\le t\le s\}$ および $\{\sigma(t,s):0\le t\le s\}$ は，(32) が伊藤過程として定義されるに十分なように，それぞれ $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^d$ で値をとる適合過程とする。さらに，$d=1$ であり，かつ，σ が $f(t,s)$ の関数 $\sigma(f(t,s))$ と見なし得る場合，これをボラティリティ関数ということがある。ここでは，α および σ を $T\times\Omega$ における可測関数であるとみなすことにする。ただし，$T=\left\{(t,s)\in\mathbb{R}_+^2 : t\le s\right\}$ である。また，B は $\mathbb{P}$ の下での $\mathbb{R}^d$ 値標準Brown運動である。

この仮定はHJM自身の「条件C.1」（[12, p.80]）と同一である。このとき，以下の定理が成り立つ。

定理 4.1 仮定2.1が成り立つものとする。このとき $\mathbb{P}$ に対する同値マルチンゲール測度 $\mathbb{Q}$ が一意に存在し，(31) は以下のように書き改めることができる。

$$f(t,s)=f(0,s)+\int_0^t \mu(u,s)du+\int_0^t \sigma(u,s)dW_u, \quad t\le s. \tag{32}$$

ただし W は $\mathbb{Q}$ の下での $\mathbb{R}^d$ 値標準Brown運動である。

この定理の証明はかなりテクニカルである。

証明の概略 任意に固定された $s\ge t$ に対して $\mathbb{R}^d$ 値過程 a_t^s と実数値過程 b_t^s をそれぞれ以下のように定義する。

$$a_t^s=-\int_t^s \sigma(t,u)du, \quad b_t^s=\frac{1}{2}\left\|a_t^s\right\|-\int_t^s \alpha(t,u)du.$$

このとき，任意に固定されたそれぞれの s に対して

$$\Lambda_{t,s}=\Lambda_{0,s}+\int_0^t \Lambda_{u,s}(r_u+b_u^s)du+\int_0^t \Lambda_{u,s}a_u^s dB_u, \quad 0\le t\le s$$

が成り立つ。ここで仮定2.1より，異なる満期 $s(i)$, $i=1,\ldots,d$, $S=\min s(i)$ を有する d 種のゼロクーポン債の割り引かれた価格 $\tilde{\Lambda}_{t,s(i)}$ を考える。すなわち

$$\tilde{\Lambda}_{t,s(i)}=\exp\left(-\int_0^t r_u du\right)\Lambda_{t,s(i)}.$$

すべての $i=1,\ldots,d$ に対して

$$d\tilde{\Lambda}_{t,s(i)}=\tilde{\Lambda}_{t,s(i)}b_t^{s(i)}dt+\tilde{\Lambda}_t^{s(i)}a_t^{s(i)}dB_t$$

が成り立つことは容易にわかる。ベクトル $a_t^{s(i)}$ の第 j 要素を第 i 行第 j 列要素とする $d\times d$ 行列を A_t, $b_t^{s(i)}$ を第 i 要素とする $\mathbb{R}^d$ 値ベクトルを λ_t として，線型方程式 $A_t\eta_t=\lambda_t$ を考える。割り引かれたゼロクーポン債価格ベクトル $\tilde{\Lambda}=(\tilde{\Lambda}_{\cdot,s(1)},\ldots,\tilde{\Lambda}_{\cdot,s(d)})$ に関して方程式が可約（方程式に解 η が存在する）であり，

ηがNovikovの条件を満たすものとする。さらに

$$\xi = \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^s \|\eta_t\|^2 dt - \int_0^s \eta_t dB_t\right)$$

が有限分散を有するとする。ここで

$$\xi_t = \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t \|\eta_s\|^2 ds - \int_0^t \eta_t dB_s\right)$$

とすれば，$(\xi_t)_{t \le S}$は非負マルチンゲールであり，$d\mathbb{P}/d\mathbb{Q} = \xi$をRadon-Nikodym導関数とする$\mathbb{P}$と同値な確率測度$\mathbb{Q}$が存在することがわかる。したがってマルチンゲール価格理論の結果を利用すれば，割り引かれたゼロクーポン債価格ベクトル$\tilde{\Lambda}$に関して，この同値確率測度$\mathbb{Q}$は$\mathbb{P}$に対する同値マルチンゲール測度$\mathbb{Q}$であり，裁定が存在しないこと，$\mathbb{Q}$は一意であることが主張し得る(16)。さらにGirsanovの定理より$W_t = B_t - \int_0^t \eta_s ds$は$\mathbb{Q}$の下で$\mathbb{R}^d$値標準Brown運動となる。したがって，$\mu(t, s) = \alpha(t, s) - \sigma(t, s)\eta_t$とおけば(32)を得る。 □

注意4.1 上の定理はHJM [12, Prop.2] と本質的に同一である。上の証明の流れは概ね彼ら自身の証明HJM [12, Appendix] に従うものの，それよりも直接的である。この定理はHJMモデルにおける同値マルチンゲール測度の存在性・一意性を示している点で非常に重要であるが，証明の中身から明らかなように，仮定2.1に強く依存している。注意2.1で述べたように，$\mathbb{Q}$の存在性・一意性を主張し得るか否かは，ゼロクーポン債も含んだ背景の証券市場均衡が不確実性の源泉である$\mathbb{R}^d$値標準Brown運動をスパンし得るか否か，すなわち完備証券市場均衡の存在性・一意性，を問題にしなければならない。HJM [12] のアイデアは，仮定2.1によって，この不確実性の源泉をスパンするに必要なだけ満期の異なるゼロクーポン債を導入しようというものであり，きわめて卓越した着想であると評価し得る。しかし仮定2.1が成り立たないような状況では，再び，ゼロクーポン債以外の別の証券で不確実性がスパンし得るか否かが問われることになる。

μおよびσが$T \times \Omega$可測な関数であるケースでは，μとσの間には，以下に示されるように，ある重要な定常的関係があることがわかる。

補題4.2 上記モデルの設定において

$$\mu(t,s) = \sigma(t,s)\int_s^t \sigma(t,s)^{\mathsf{T}} du. \tag{33}$$

なる関係が成り立つ。

証明は補題を参照されたし。上の計算を正当化する技術的な諸条件に関しては，適宜，専門の文献を参照されたし。

定理4.2（HJM期間構造モデル） (33)と短期金利の定義$r_t = f(t, t)$を用いることによって

$$r_t = f(0,t) + \int_0^t \sigma(v,t)\int_v^t \sigma(v,u)^{\mathsf{T}} du dv + \int_0^t \sigma(v,t) dW_v \tag{34}$$

(16) 赤壁 [28, 定理3.2, 命題1 (p.155)] を参照されたし。

を得る。 □

証明 証明の本質的な部分は補題4.2のとおり。後はほとんど自明である。

注意4.2 仮定4.3，定理4.2から明らかなように，単一因子（短期金利）で表されるCIRモデルとは違って，全利回りをもとにするHJMモデルでは「平均反転性」が問題にされることはほとんどない。また，μおよびσが$T\times\Omega$可測な関数であるHJMの一般的設定のケースでは(34)の成立が示されることがわかったが，σを一般のボラティリティ関数$\sigma(f(t, s))$で置き換えた場合，必ずしも(34)が成立する保証はない。これは，確率微分方程式(32)の解の存在性と一意性に関わる問題であり，σに対してFeynman-Kacの公式が要求する諸条件（連続性・微分可能性，Lipschitz条件・成長条件を満足すること）が課せられることになるであろう。これは，HJMモデルによって現実のデータから期間構造派生証券を評価する実務家にとっては，かなり厳しい制約となると思われる。さらに，σがほとんどいたるところでゼロであれば，確定的な債券市場において無裁定ということから期待されるように，すべての時刻tにおいてスポット金利r_tと先渡し金利$f(0, t)$は（ほとんど確実に）一致する。最後に，上記のHJMの一般的な設定のもとでは，(4′)あるいはCIRの(26)と比較し得るようなゼロクーポン債の明示的な価格公式を導くことは非常に困難である。ゼロクーポン債の明示的な価格公式を得るには，以下の補題4.3のように，σに関してより特殊化した仮定を設定しなければならない。

(34)と基本公式(3)から，少なくとも理論的には，任意の証券を評価することができる。Gauss型の特殊なケースを別にすれば，HJMの設定に関しては，ほとんどの評価の作業を数値的に行うことができる。しかしながらこのモデルに関しては，特殊なケースを除けば，状態変数の集合は有限ではない。したがって，偏微分方程式にもとづいた計算法は利用できない。その代わりに，有限の状態数を持つ類似の離散時間モデルを構築することによって近似価格を計算することになる。

4.3 HJMゼロクーポン債価格とヨーロッパ型コールの評価

CIRモデルと同様，HJMモデルにおいても，ゼロクーポン債に対するヨーロッパ型コールの明示的な公式を導出することを考える。しかし，ボラティリティ関数$\sigma(f(t, s))$を一般形のまま扱おうとすれば，コールの複製可能性と「リスク中立的」評価式を与える命題2.2の結論を上回る内容を提示することは難しい。そこで，ボラティリティ関数σは正値定数（これは標準Brown運動の次元dが$d=1$であることも意味する）であると仮定することによって，コールの明示的な評価公式を導くことを試みる。ただしこのような単純化は，σを$T\times\Omega$可測な関数（あるいは，瞬間先渡し率の関数）として定式化するHJMモデル本来の理論的意義からみれば，はなはだしい逸脱であるといわざるを得ない(17)。しかしながら，公式を現実問題に適用する実務家の立場から見れば，注4.2で指摘したように，たとえFeynman-Kacの公式が要求する諸条件を満たすようななんらかの解析関数を仮定したとしても，σの特定化に関するad-hoc性は回避し得ないと思われる。

CIRモデルで扱ったと同様，満期がTのゼロクーポン債に対して書かれた，満期$s\leq T$で行使価格Kのヨーロッパ型コールオプションを考える。したがって，満期sにおけるコールの価値は$(\Lambda_{s,T}-K)^+$によって与えられる。

結論を導くために，上記仮定のもとにおけるゼロクーポン債の価格に関する補題を用意する。

(17) Björk [4, Sec.5.3] は$\sigma(t, s)$を2乗可積分な**確定関数**としてコールの明示的な評価公式を導いている。しかし残念ながら，この意味で，Björk [4] のアプローチも一般的というには程遠い。

補題 4.3 上記仮定のもとでは，(34)より，短期金利 r_t は

$$r_t = f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2}t^2 + \sigma W_t$$

で与えられる。また，時刻 T を満期とするゼロクーポン債の時刻 t における価格は

$$\begin{aligned}\Lambda_{t,T} &= \frac{\Lambda_{0,T}}{\Lambda_{0,t}}\exp\left(-\sigma(T-t)W_t - \frac{\sigma^2 sT(T-t)}{2}\right) \\ &= \frac{\Lambda_{0,T}}{\Lambda_{0,t}}\exp\left[-(T-t)\left(r_t - \frac{\sigma^2 t(T-t)}{2} - f(0,t)\right)\right]\end{aligned} \tag{35}$$

によって明示的に与えられる。

証明は補論を参照されたし。

注意 4.3 HJM ゼロクーポン債価格 (35) と，最も一般的な (4′) あるいは CIR ゼロクーポン債価格 (26) を比較することは容易である。(26) と (35) を比較すれば，いずれも適合過程 r_t の現在時刻 t の値とゼロクーポン債の満期までの残り時間 $(T-t)$ に依存する点が共通である。ただしこの共通点は σ を定数とする特殊な仮定のもとで得られたもので，必ずしも一般には妥当しないことに注意する必要がある。

補題 4.3 を用いれば以下の結果を得る。

命題 4.2（HJM 期間構造ヨーロッパ型コール価格） 時刻 0 におけるコールの価格は

$$C_0 = \Lambda_{0,T}N(d) - K\Lambda_{0,s}N\left(d - \sigma\sqrt{s}(T-s)\right)$$

によって与えられる。ただし，N は標準正規分布関数であり，d は

$$d = \frac{\sigma\sqrt{s}(T-s)}{2} - \frac{\log(K\Lambda_{0,s}/\Lambda_{0,T})}{\sigma\sqrt{s}(T-s)}$$

によって与えられるパラメータである。

証明は補論を参照されたし。この命題の結論は HJM [12, Sec.6 (pp.90-2)], Jamshidian [16] と本質的に同じである。しかし HJM [12] 自身は証明を与えていない。

注意 4.4 得られた評価公式と Black-Scholes 公式との対応関係は明らかであろう。ボラティリティ関数が正値定数であるという単純化がなされているものの，この評価公式は Black-Scholes 公式の場合と同様標準正規分布関数 N のみで表されており，正値定数 σ の計測にのみ計算機コストを支払えばよいということになる。

5 結　び

本稿は，CIR 期間構造モデルと HJM 期間構造モデルの理論的フレームワークを検証し，数理ファイナンス論の観点から再検討したものである。

CIR モデルは，連続時間設定における投資家の効用最大化問題から導出されたものであり，証券市場均衡理論の成果を直接適用することが可能で，この意味でミクロ経済学的基礎を有している期間構造

モデルであることが再確認された。

HJMモデルでは，利回り曲線の将来の時間発展が依存する「状態変数」は，ある特定の有限次元状態ベクトルではなく，経常利回り曲線全体となっている。HJMモデルの際立った特徴として，同値マルチンゲール測度$\mathbb{Q}$の下では先渡し率$f(t, s)$の確率分布がボラティリティ関数σにのみ依存し，したがって，HJM期間構造派生証券の価格もσにのみ依存すると期待してよいことが再確認された。この特徴は，Black-Scholes公式と同等の計算コストで，期間構造派生証券の価格を計算することができるということを期待させる。

それぞれのモデルについて，期間構造派生証券の代表例として，ゼロクーポン債に対して書かれたヨーロッパ型コールオプションの評価問題を検討した。「リスク中立」的評価と複製可能性については命題2.2によって論理的に解決されるが，明示的な公式を得るためにはゼロクーポン債の価格$\Lambda_{t,s}$そのものを明示的に表す必要がある。これはいずれのモデルにおいても，Feynman-Kacアプローチによって解を得ることになる。Feynman-Kacアプローチは，一定の技術的な諸条件を満たしていれば解の存在性と一意性まで保証してくれるため，応用上まことに都合がよい。特に，期間構造モデルは無裁定状態における（「リスク中立化」「市場均衡」「同値マルチンゲール測度」の下での）評価でなければ意味をなさない。この状態での期間構造モデルの解の一意性が保証されていることは，理論上きわめて都合がよい。

しかし，Feynman-Kacアプローチを採用するために引き起こされる問題点があることも事実である。本稿では考察することができなかったが，「破産のリスク」の処理がある。Cauchy問題（境界条件を持つ微分方程式）を解くための手法としてFeynman-Kacアプローチが採用できることを保証するように，破産のリスクをモデルに導入することは非常に困難である。なぜならば，多くの場合，破産によって値関数あるいは終端ペイオフ関数の連続微分可能性が満足されなくなると考えられるからである。そのような場合には，Feynman-Kacアプローチによる解の存在性と一意性が主張し得ない。したがって，場当たり的にCauchy問題を解き（解ければ存在性は示される），まったく別の手法で一意性を示さなければならなくなる。「破産のリスク」の問題は，稿を改めて論ずることにしたい。

また，注4.2のなかでも指摘したように，Feynman-Kacアプローチが要求する技術的な諸条件はきわめて厳しいものである。CIRモデルの場合は幸いにして，追加的な強い仮定をおくことなしに明示的な表現 (26) を得ることができた。他方，HJMモデルの場合は，σを$T\times\Omega$可測な関数（あるいは，瞬間先渡し率の関数）として定式化するHJMモデル本来の理論的意義からみれば，ゼロクーポン債の価格$\Lambda_{t,s}$を得るためになされるボラティリティ関数σの特定化はすべてad-hocであるという批判を免れ得ないであろう。少なくとも実務家の立場からすれば，特定化のad-hoc性を回避し得ない現状は決して満足すべき状況であるとはいえないであろう。

単一因子によるCIRモデルよりは，因子に依存しないHJMモデルのほうが理論的一般性が高いものと見なされる傾向があるようである。CIRモデルでは同値マルチンゲール測度$\mathbb{Q}$を与える密度が一意に決定される（(17) を参照されたし）。これは，CIRモデルが証券市場均衡理論と両立し得るものであるから当然であるといえる。他方，HJMモデルも定理4.1によって$\mathbb{Q}$の存在性・一意性が証明されるが，注意4.1で指摘したように，この結論は仮定2.1に強く依存している。したがって仮定2.1が成り立たないような状況では，HJMモデルが証券市場均衡と両立し得るか否かは他の本源的証券の価格モデルに依存することになる。現実の証券市場では，満期の異なるゼロクーポン債を必要なだけ導入し得るとは考えがたいから，この点は実務家にとっても厄介な問題となるであろう。

CIRモデルでは，ゼロクーポン債に対するコールの明示的な評価公式はリーズナブルな計算コストを保証するものではなかった。HJMモデルでは，Black-Scholes公式と同等の計算コストを保証してくれるものの，明示的なゼロクーポン債価格を得るためσを正値定数とするという強い仮定に依存することとなった。したがって，本稿が考察するゼロクーポン債に対する期間構造ヨーロッパ型コールの評価に関する限り，この二つの優れた期間構造モデルの間に優劣はつけがたい。

A　補論—本稿で必要な確率論の結果と命題・補題の証明—

A.1　確率論の諸結果

A.1.1　Feynman—Kacの公式

所与の$T>0$に対してCauchy問題を考える。すなわち

$$\mathfrak{D}f(x,t)-r(x,t)f(x,t)+h(x,t)=0,\quad (x,t)\in\mathbb{R}^N\times[0,\ T) \tag{A.1}$$

の境界条件

$$f(x,T)=g(x),\quad x\in\mathbb{R}^N \tag{A.2}$$

の下での解$f\in C^{2,1}(\mathbb{R}^N\times[0,\ T))$を見出すことである。ここで$r:\mathbb{R}^N\times[0,\ T]\to\mathbb{R}$, $h:\mathbb{R}^N\times[0,\ T]\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}^N\times[0,\ T]\to\mathbb{R}^N$, $\sigma:\mathbb{R}^N\times[0,\ T]\to\mathbb{R}^{N\times d}$とする。ただし微分作用素$\mathfrak{D}$は次のように定義される。

$$\mathfrak{D}f(x,t)=f_t(x,t)+f_x(x,t)\mu(x,t)+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\sigma(x,t)\sigma(x,t)^{\top}f_{xx}(x,t)\right]. \tag{A.3}$$

(A.1)-(A.2)に対するFeynman Kacの解は，存在するとすれば

$$f(x,t)=\mathbb{E}^{x,t}\left[\int_t^T\varphi_{t,s}h(X_s,s)ds+\varphi_{t,T}g(X_T)\right] \tag{A.4}$$

で与えられる。ただし

$$\varphi_{t,s}=\exp\left[-\int_t^s r(X_\tau,\tau)d\tau\right]$$

とする。以下の条件

(a)　$r,\ g,\ h,\ \mu,\ \sigma,\ f$はすべて少なくとも2階連続微分可能で$x$に関してLipschitz条件を満たす

(b)　rは非負でない

(c)　$r,\ g,\ h,\ \mu,\ \sigma,\ f$とその導関数は$x$に関して成長条件を満たす

が満たされているものとすれば，(A.1)-(A.2) に対するFeynman Kacの解は一意に存在し，(A.4) で与えられることが知られている[18]。

A.1.2　山田・渡辺の一意性定理

定理A.1 (Yamada-Watanabe [27])　1次元確率微分方程式

$$dX_t=b(X_t)dt+\sigma(X_t)dB_t,\qquad X_0=x \tag{A.5}$$

(18)　この条件はさらに緩めることが可能であるが，この点に関しては専門の数学書に譲ることにする。

を考える。σ, b は可測，かつ，以下の条件を満たすものとする。

(a) 条件

$$\int_{0+} \rho(u)^{-1} du = \infty,$$
$$(\sigma(x) - \sigma(y))^2 \le \rho(|x-y|), \qquad \text{すべての} x, y \in \mathbb{R} \text{に対して}$$

を満たす増加関数 $\rho : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ が存在する。

(b) b は Lipschitz 条件を満たす。

このとき，(A.5)の解過程には道ごとの一意性が成り立つ。

証明は Rogers-Williams [23, V.40 (pp.265-6)] を参照されたし。

A.1.3 Bessel 過程と Bessel 2 乗過程

補題 A.1 $\alpha > 0$ として，α 次元 Bessel 過程 r は確率微分方程式

$$dr_t = \frac{\alpha - 1}{2r_t} dt + dB_t, \qquad r_0 = a > 0$$

を満たす。Bessel 過程の推移密度は

$$p(t,x,y) = \frac{\exp\left[-(x^2+y^2)/2t\right]}{t(xy)^{(\alpha-2)/2}} y^{\alpha-1} I_{(\alpha-2)/2}\left(\frac{xy}{t}\right)$$

で明示的に与えられる。ただし，$I_\nu(x)$ は修正 Bessel 関数

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)} \tag{A.6}$$

である。

Bessel 過程に関する以上の事実は Karlin-Taylor[18, p.238]による。$\alpha = n$, n は整数のとき

$$r_t = \sqrt{\left(w_t^1\right)^2 + \cdots + \left(w_t^n\right)^2}$$

となる。ただし，w^k, $k = 1, 2, \ldots, n$ は独立な標準 Brown 運動過程である。

補題 A.2 $Z = r^2$ に関して伊藤の補題を適用することにより，Bessel 2 乗過程 Z の確率微分方程式を得る。

$$\begin{aligned} dZ_t &= 2r_t dr_t + dt \\ &= \alpha dt + 2r_t dB_t \\ &= \alpha dt + 2\sqrt{Z_t}\, dB_t, \qquad Z_0 = r_0^2 = z_0 > 0 \end{aligned}$$

山田・渡辺の一意性定理 A.1 より，上の確率微分方程式には道ごとに一意な解が存在する。また，$\alpha \ge 2$ のとき，$t > 0$ において Z は決してゼロになることはない。

最後の主張は Rogers-Williams[23, V.35 (pp.69–70)]を参照されたし。

A.2 命題・補題の証明

命題2.1の証明 適合過程 $\tilde{\Lambda}_{t,s}$, $0 \le t \le s$ は $\mathbb{Q}$-マルチンゲールであるから，$\tilde{\Lambda}_{t,s}L_t$, $0 \le t \le s$ は $\mathbb{P}$-マルチンゲールである。また，すべての $t \in [0, s]$ に対してほとんど確実に $\tilde{\Lambda}_{t,s}L_t > 0$ であることは明らか。このとき，(2)と同じように，Girsanov の定理から

$$\tilde{\Lambda}_{t,s}L_t = \tilde{\Lambda}_{0,s}\exp\left(\int_0^t \theta_u^s dB_u - \frac{1}{2}\int_0^t \left\|\theta_u^s\right\|^2 du\right),$$

かつ，$\int_0^s \|\theta_u^s\|^2 du < \infty$ を満たすある適合過程 θ_t^s, $0 \le t \le s$ が存在することがわかる。したがって，(2)より

$$\Lambda_{t,s} = \Lambda_{0,s}\exp\left(\int_0^t r(u)du + \int_0^t (\theta_u^s - \xi_u)dB_u - \frac{1}{2}\int_0^t \left(\left\|\theta_u^s\right\|^2 - \left\|\xi(u)\right\|^2\right)du\right).$$

この結果を確率的に微分すれば

$$\frac{d\Lambda_{t,s}}{\Lambda_{t,s}} = \left(r(t) + \left\|\xi(t)\right\|^2 - \theta_t^s\xi(t)\right)dt + \left(\theta_t^s - \xi(t)\right)dB_t$$

を得る。ここで，$\sigma_t^s = \theta_t^s - \xi(t)$ とおけば所望の結果を得る。 □

命題2.2の証明 取引戦略 ϕ は自己資金調達可能であり，割引価値 $\tilde{V}_t$ がすべての t に対して非負，かつ，$\sup_{t \in [0,T]}\tilde{V}_t$ が $\mathbb{Q}$ の下で2乗可積分となるものとする。このとき

$$d\tilde{V}_t = H_t d\tilde{\Lambda}_{t,T} = H_t\tilde{\Lambda}_{t,T}\sigma_t^T dW_t$$

が成り立つ。$\sup_{t\in[0,T]}\tilde{V}_t$ は $\mathbb{Q}$-2乗可積分であるから，割引価値過程 $\tilde{V}$ は $\mathbb{Q}$-マルチンゲール，すなわち，$\tilde{V}_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\tilde{V}_s|\mathfrak{F}_t)$, $\forall t \le s$ である。ここで，$V_s = x$ とすれば

$$V_t = \exp\left(\int_0^t r(u)du\right)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[x\exp\left(-\int_0^s r(u)du\right)\middle|\mathfrak{F}_t\right].$$

逆を証明するために，割引価値 $\tilde{V}_t$ がすべての t に対して非負，かつ，$\sup_{t\in[0,T]}\tilde{V}_t$ が $\mathbb{Q}$ の下で2乗可積分となるような自己資金調達可能取引戦略を見出すことにする。マルチンゲール表現定理によって，$\int_0^s \psi_t^2 dt < \infty$，かつ

$$x\exp\left(-\int_0^s r(u)du\right) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[x\exp\left(-\int_0^s r(u)du\right)\right] + \int_0^s \psi_s dW_s$$

を満たす適合過程 ψ が存在することがわかる。このとき，すべての $t \le s$ に対して

$$H_t = \frac{\psi_t}{\tilde{\Lambda}_{t,T}\sigma_t^T} \quad \text{かつ} \quad H_t^0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[x\exp\left(-\int_0^s r(u)du\right)\middle|\mathfrak{F}_t\right] - \frac{\psi_t}{\sigma_t^T}$$

を満たすように取引戦略 ϕ を定めれば，このコールを複製することができる。すなわち，時刻 s におけるこの取引戦略の価値 V_s は x であることがわかる。 □

命題2.3の証明　「変動率手形」と呼ばれる以下のような証券を考える。ある満期τまでは短期金利rそれ自体，それ以後は1であるような配当率が支払われるものとする。このような変動率手形の価値をfで表すことにすれば

$$
\begin{aligned}
f(r_t,t) &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\int_t^\tau \varphi_{t,s} r_s ds + \varphi_{t,\tau}\right] = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\int_t^\tau r_s \exp\left(-\int_t^s r_v dv\right) ds + \exp\left(-\int_t^\tau r_v dv\right)\right] \\
&= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[1 - \exp\left(-\int_t^\tau r_v dv\right) + \exp\left(-\int_t^\tau r_v dv\right)\right] \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

問題の配当率スワップの時刻tにおける価値をv_tで表すことにすれば

$$
\begin{aligned}
v_t &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\int_t^\tau \varphi_{t,s}(r_s - r^*) ds\right] \\
&= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\int_t^\tau \varphi_{t,s} r_s ds + \varphi_{t,\tau}\right] - \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[r^* \int_t^\tau \varphi_{t,s} ds + \varphi_{t,\tau}\right] \\
&= f(r_t,t) - r^* \int_t^\tau \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}(\varphi_{t,s}) ds - \Lambda_{t,\tau} \qquad \text{(Fubiniの定理より)} \\
&= 1 - r^* \int_t^\tau \Lambda_{t,s} ds - \Lambda_{t,\tau}.
\end{aligned}
$$

この結果より，主張の後半部分は明らか。　□

補題3.1の証明の概略　次のような実数次元Bessel 2乗過程Zを考える（Bessel過程とBessel 2乗過程については補論A.1.3を参照されたし）。

$$
dZ_t = 2\frac{2b}{k^2} dt + 2\sqrt{Z_t} dB_t, \qquad Z_0 = z_0.
$$

補論A.1.2の山田・渡辺の一意性定理（定理A.1）によって，$2b/k^2 > 1$のとき上の確率微分方程式は道ごとに一意で非負な解過程Zが存在することが知られている。このとき，Delbaen [7] によれば，(8)で定義される確率過程は$4b/k^2$次元Bessel 2乗過程Zで表すことができる。

$$
Y_t = \exp(-\kappa t) Z_{(k^2/4\kappa)(e^{\kappa t}-1)}.
$$

厳密な証明はPitman-Yor[21]を参照されたし。この結果から，Yの存在性と道ごとの一意性，および非負性は，上の実数次元Bessel 2乗過程Zが道ごとに一意に存在することから明らか。ここでは，この結果を伊藤の補題を用いて計算によって確かめる。

$\tau = (k^2/4\kappa)\ (e^{\kappa t} - 1)$とおいて

$$
dB_\tau = \sqrt{\frac{k^2}{4} e^{\kappa t}} dB_t = \frac{k}{2} e^{\kappa t/2} dB_t
$$

であることを考慮して

$$
\begin{aligned}
dZ_\tau &= 2\frac{2b}{k^2}d\tau + 2\sqrt{Z_\tau}dB_\tau \\
&= 2\frac{2b}{k^2}\frac{k^2}{4}e^{\kappa}dt + 2\sqrt{Z_\tau}dB_\tau \\
&= be^{\kappa t}dt + ke^{\kappa t/2}\sqrt{Z_\tau}dB_t.
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
dY_t &= -\kappa e - \kappa t Z_\tau dt + e^{-\kappa t}dZ_\tau \\
&= -\kappa Y_t dt + bdt + ke^{-\kappa t/2}\sqrt{Z_\tau}dB_t \\
&= (b-\kappa Y_t)dt + k\sqrt{\exp(-\kappa t)Z_\tau}dB_t \\
&= (b-\kappa Y_t)dt + k\sqrt{Y_t}dB_t.
\end{aligned}
$$

□

補題3.2の証明

$$
V(x,\ y) = J(x,\ y,\ 0),\ J(x,\ y,\ T) = 0 \qquad \text{かつ}
$$

$$
J(x,\ y,\ t) = A_1(t)\ \log(x) + A_2(t)y + A_3(t), \qquad (x,\ y,\ t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times [0,\ T)
$$

なる関数Jを考える。HJB方程式は

$$
\sup_{c\in\mathcal{C}}\left\{\dot{A}_1(t)\log(x) + \dot{A}_2(t)y + \dot{A}_3(t) + A_1(t)\frac{1}{x}(hxy - c) + A_2(t)(b-\kappa y) - A_1(t)\frac{\varepsilon^2 y}{4} + e^{-\rho t}\log(c)\right\} = 0.
$$

上式をcで微分して

$$
-\frac{A_1(t)}{x} + \frac{e^{-\rho t}}{c} = 0.
$$

この関係を元の方程式に代入して，$\log(c)$の係数を見れば

$$
\dot{A}_1(t) + e^{-\rho t} = 0, \qquad A_1(T) = 0
$$

なる微分方程式を得る。したがって$A_1(t) = e^{-\rho t}(1 - e^{-\rho\ (T-t)})/\rho$。かくして

$$
c = \frac{\rho x}{1 - e^{-\rho(T-t)}}.
$$

これより最適消費計画δと最適資本ストックKがそれぞれ(10)と(9)で与えられることがわかる[19]。 □

補題3.3の証明 (9)–(10)によって定義される過程Kの存在性は，K_tをYで表すことによって得られる。これは伊藤の補題を援用して$\log(K_t)$を展開することによって得られる。

(19) HJB方程式の解が値関数$V(x,\ y)$に一致することは別に主張する必要があるが，この最適性のチェックは割愛する。この点に関しては，$A_2(t), A_3(t)$に関する常微分方程式を解くことによって$J(x,\ y,\ t)$を明示的に表し，横断性条件を考慮することによってなし得るということを指摘するにとどめる。

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t (\bar{b} - \bar{\kappa} Y_s) ds + \int_0^t \bar{k}\sqrt{Y_s} dB_s, \quad 2\bar{b} > \bar{k}^2$$

であるから，上の補題の証明から積分$\int_0^t Y_s ds$は存在し，確率積分$\int_0^t \bar{k}\sqrt{Y_s} dB_s$は定義されることがわかる。ここで$\log(K_t)$に伊藤の補題を適用すれば

$$\begin{aligned} d\log(K_t) &= \frac{1}{K_t} dK_t - \frac{1}{K_t^2} K_t^2 \varepsilon^2 Y_t dt \\ &= \left((h - \varepsilon^2) Y_t - \frac{\rho}{1 - e^{-\rho(T-t)}} \right) dt + \varepsilon \sqrt{Y_t} dB_t \\ &= \left(-\frac{\rho}{1 - e^{-\rho(T-t)}} - \bar{\kappa} Y_t \right) dt + \varepsilon \sqrt{Y_t} dB_t. \end{aligned}$$

したがって$\log(K_t)$は

$$\log(K_t) = \log(K_0) + \int_0^t \left(-\frac{\rho}{1 - e^{-\rho(T-s)}} - \bar{\kappa} Y_s \right) ds + \int_0^t \varepsilon \sqrt{Y_s} dB_s$$

となるから，確率過程$\log(K)$は存在する。$\log(\cdot)$は単調変換であるから，Kの存在性は示された。 □

命題3.1の証明 $\bar{r}_t \equiv \mathbb{E}(r_t)$は有限かつ$t$に関して連続である。なぜならば，上述のとおり，$r$は実数次元Bessel 2乗過程

$$r_t = \exp(-\kappa t) Z_{(\sigma_r^2/4\kappa)(e^{\kappa t}-1)}$$

で表すことができる。したがって$\mathbb{E}(r_t)$の連続性は保証される。Bessel 2乗過程の定義より

$$\mathbb{E}\left(Z_{(\sigma_r^2/4\kappa)(e^{\kappa t}-1)} \right) = Z_0 + (\sigma_r^2 / 4\kappa)(e^{\kappa t} - 1)$$

であるから，適当な正の数C, D, $D \geq C$に対して

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(r_t) &= \exp(-\kappa t)\, \mathbb{E}\left(Z_{(\sigma_r^2/4\kappa)(e^{\kappa t}-1)} \right) \\ &\leq e^{-\kappa t}\left(C(e^{\kappa t} - 1) + D \right) \\ &= C + (D - C) e^{-\kappa t} \\ &\leq D. \end{aligned}$$

よって

$$\bar{r}_t = \mathbb{E}(r_t) \leq D.$$

かくして有界性が示された。

$D \geq \mathbb{E}(r_t) > 0$であるからFubiniの定理が使えて

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T r_t dt \right) = \int_0^T \mathbb{E}(r_t) dt = \int_0^T \bar{r}_t dt \leq DT < \infty.$$

それゆえ，確率積分 $\int_0^T \sigma_r \sqrt{r_t} dB_t$ の期待値はゼロであることがわかる。

かくして

$$\bar{r}_t = r_0 + \mathbb{E}\left[\int_0^t \kappa(r^* - r_s)ds\right].$$

再びFubiniの定理を用いて，(14)から

$$\begin{aligned}
\bar{r}_t &= \mathbb{E}(r_t) = \mathbb{E}\left(r_0 + \int_0^t \kappa(r^* - r_s)ds + \int_0^t \sigma_r \sqrt{r_t} dB_t\right) \\
&= r_0 + \mathbb{E}\left(\int_0^t \kappa(r^* - r_s)ds\right) \\
&= r_0 + \left(\int_0^t \mathbb{E}\big(\kappa(r^* - r_s)\big)ds\right) \qquad \text{Fubiniの定理による} \\
&= r_0 + \left(\int_0^t \kappa\big(r^* - \mathbb{E}(r_s)\big)ds\right).
\end{aligned}$$

これは，$\bar{r}_t = r^* + (r_0 - r^*)e^{-\kappa t}$ を解とする以下の常微分方程式と同値である[20]。

$$\frac{d\bar{r}_t}{dt} = \kappa(r^* - \bar{r}_t); \qquad \bar{r}_0 = r_0.$$

かくして t に関して指数的に $\mathbb{E}(r_t) \to r^*$ となり，r^* は短期金利の「長期平均」水準となる。条件付き期待値にFubiniの定理を用いることによって，任意の時刻 t および $s \geq t$ に関して

$$\mathbb{E}_t(r_s) = r^* + (r_t - r^*)e^{-\kappa(s-t)} \qquad \text{ほとんど確実に}$$

が成り立つことを同様に示すことができる[21]。 □

補題3.4の証明 (15), (13)から

$$dp_t = -p_t r_t dt - p_t \frac{\varepsilon}{\sqrt{h - \varepsilon^2}} \sqrt{r_t} dB_t.$$

$\log(p_t)$ に伊藤の補題を適用して

$$\begin{aligned}
d\log(p_t) &= \frac{dp_t}{p_t} - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{h - \varepsilon^2}\frac{p_t^2 r_t}{p_t^2} dt \\
&= -r_t\left(1 + \frac{\varepsilon^2/2}{h - \varepsilon^2}\right)dt - \frac{\varepsilon}{\sqrt{h - \varepsilon^2}}\sqrt{r_t} dB_t \\
&= \frac{h - \varepsilon^2/2}{\varepsilon^2 - h} r_t dt - \frac{\varepsilon}{\sqrt{h - \varepsilon^2}}\sqrt{r_t} dB_t.
\end{aligned}$$

---

(20) $x_t = r^* - \bar{r}_t$ とおけば，常微分方程式は

$$\frac{dx_t}{dt} = -\kappa x_t; \qquad x_0 = r^* - r_0$$

となる。したがって $x_t = (r^* - r_0)\, e^{-\kappa t}$。したがって，所望の解を得る。

(21) $\bar{r}_s = \mathbb{E}_t(r_s)$, $s \geq t$ とおけば，$s = t$ を初期時点として上の議論がそのまま成り立つ。

したがって

$$\log(p_t)-\log(p_0)=\frac{h-\varepsilon^2/2}{\varepsilon^2-h}\int_0^t r_s ds-\frac{\varepsilon}{\sqrt{h-\varepsilon^2}}\int_0^t \sqrt{r_s}dB_s.$$

よって (16) を得る。 □

補題3.5の証明　確率過程 θ を

$$\theta_t=\frac{\varepsilon}{\sqrt{h-\varepsilon^2}}\sqrt{r_t}$$

とおく。指数関数は凸関数であるから

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\exp\left(\int_0^T\theta_t^2dt\right)\right]&=\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{\varepsilon^2}{h-\varepsilon^2}\int_0^T r_t dt\right)\right]\\&\le\exp\left[\mathbb{E}\left(\frac{\varepsilon^2}{h-\varepsilon^2}\int_0^T r_t dt\right)\right]\quad\text{Jensen の不等式より}\\&=\exp\left[\frac{\varepsilon^2}{h-\varepsilon^2}\mathbb{E}\left(\int_0^T r_t dt\right)\right]\\&<\infty.\qquad\mathbb{E}\left(\int_0^T r_t dt\right)<\infty\ \text{より}\end{aligned}$$

これは θ が Novikov の条件を満たすことを示している。したがって，ξ は Novikov の定理より非負マルチンゲールになる。このとき Girsanov の定理から

$$\begin{aligned}dW_t&=dB_t+\theta_t dt\\&=dB_t+\frac{\varepsilon}{\sqrt{h-\varepsilon^2}}\sqrt{r_t}dt\end{aligned}$$

で定義される確率過程 W は，密度過程 ξ をとする同値確率測度 $\mathbb{Q}$ の下で標準 Brown 運動となる。 □

系3.1の証明　$f(x,t)=H_1(T-t)\exp[-H_2(T-t)x]$ が境界条件 $f(x,T)=1$ を満たすことは明らか。次に

$$g(x,t)=\log f(x,t)=\frac{2\kappa r^*}{\sigma_r^2}\log\left[\frac{2\gamma e^{(\gamma+\kappa)(T-t)/2}}{(\gamma+\kappa)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma}\right]-\frac{2\left(e^{\gamma(T-t)}-1\right)}{(\gamma+\kappa)\left(e^{\gamma(T-t)}-1\right)+2\gamma}x$$

とする。このとき

$$g_x=-H_2(T-t)=-\frac{2\left(e^{\gamma(T-t)}-1\right)}{(\gamma+\kappa)\left(e^{\gamma(T-t)}-1\right)+2\gamma},$$

$$g_{xx}=0,g_t=\frac{2\kappa r^*}{\sigma_r^2}\left[-\frac{\gamma+\kappa}{2}+\frac{\gamma(\gamma+\kappa)e^{\gamma(T-t)}}{(\gamma+\kappa)\left(e^{\gamma(T-t)}-1\right)+2\gamma}\right]+\frac{4\gamma^2e^{\gamma(T-t)}}{\left[(\gamma+\kappa)\left(e^{\gamma(T-t)}-1\right)+2\gamma\right]^2}x.$$

また

$$g_t = \frac{f_t}{f}, \quad g_x = \frac{f_x}{f}, \quad g_{xx} = \frac{f_{xx}}{f} - \left(\frac{f_x}{f}\right)^2.$$

したがって，期間構造偏微分方程式 (21) から

$$g_t + g_x\kappa(r^* - x) + \frac{1}{2}g_x^2\sigma_r^2 x - x = 0.$$

先に定義した$g(x, t)$がこの方程式を満たすことを示せばよい。上式において，xの係数は

$$\frac{1}{(\gamma+\kappa)\left(e^{\gamma(T-t)}-1\right)+2\gamma}\left\{4\gamma^2 e^{\gamma(T-t)} + 2\kappa\left\{(\gamma+\kappa)e^{\gamma(T-t)}+\gamma-\kappa\right\} + 2\sigma_r^2\left(e^{\gamma(T-t)}-1\right)^2 - \left\{(\gamma+\kappa)e^{\gamma(T-t)}+\gamma-\kappa\right\}^2\right\} = 0.$$

xに関わらない部分は

$$\frac{2\kappa r^*}{\sigma_r^2}\left[-\frac{\gamma+\kappa}{2} + \frac{\gamma(\gamma+\kappa)e^{\gamma(T-t)}}{(\gamma+\kappa)\left(e^{\gamma(T-t)}-1\right)+2\gamma} - \frac{\sigma_r^2\left(e^{\gamma(T-t)}-1\right)}{(\gamma+\kappa)\left(e^{\gamma(T-t)}-1\right)+2\gamma}\right] = 0.$$

したがって，与えられた関係は確かに解である。 □

命題 3.2 の証明　xからスタートする(27)の解過程を(X_t^x)で表すことにし，Ikeda-Watanabe[15, pp.235-40]の結果を用いれば，X_t^x の Laplace 変換（積率母関数）が

$$\mathbb{E}\left(e^{-\lambda X_t^x}\right) = \frac{1}{(2\lambda L+1)^{2a/\sigma_r^2}}\exp\left(-\frac{\lambda L\zeta}{2\lambda L+1}\right)$$

によって与えられることがわかる。ただし，$L = \sigma_r^2 / 4(\kappa+\alpha\sigma_r)(1-e^{-(\kappa+\alpha\sigma_r)t})$, $\zeta = 4x(\kappa+\alpha\sigma_r)/(\sigma_r^2(e^{(\kappa+\alpha\sigma_r)t}-1))$ とする。この記号を用いれば，X_t^x/L の Laplace 変換（積率母関数）が $g_{4a/\sigma_r^2,\zeta}$，ただし

$$g_{\delta,\zeta}(\lambda) = \frac{1}{(2\lambda+1)^{\delta/2}}\exp\left(-\frac{\lambda\zeta}{2\lambda+1}\right)$$

によって与えられることがわかる。これは自由度δ, 非心母数ζの非心χ^2分布の Laplace 変換（積率母関数）である。Laplace 変換を反転することによって，この分布の密度が

$$f_{\delta,\zeta}(x) = \frac{e^{-\zeta/2}}{2\zeta^{\delta/4-1/2}}e^{-x/2}x^{\delta/4-1/2}I_{\delta/2-1}\left(\sqrt{x\zeta}\right), \quad x > 0$$

によって与えられることが知られている。$I_{\delta/2-1}$は自由度$\delta/2-1$の修正 Bessel 関数（(A.6)を参照されたし）である。

ところで，命題3.1より

$$
\begin{aligned}
C_0 &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[(\Lambda_{s,T}-K)^+\exp\left(-\int_0^s r(u)du\right)\right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(H_1(T-s)\exp\left(H_2(T-s)r_s\right)-K\right)^+\exp\left(-\int_0^s r(u)du\right)\right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\Lambda_{s,T}1_{\{r_s<r^*\}}\exp\left(-\int_0^s r(u)du\right)\right]-K\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[1_{\{r_s<r^*\}}\exp\left(-\int_0^s r(u)du\right)\right]
\end{aligned}
$$

である。割り引かれた価格の $\mathbb{Q}$-マルチンゲール性より，

$$
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\Lambda_{s,T}e^{-\int_0^s r(u)du}) = \Lambda_{0,T}
$$

を得る。同様に，$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(e^{-\int_0^s r(u)du}) = \Lambda_{0,s}$。したがって，第1式最右辺を書き改めて

$$
C_0 = \Lambda_{0,T}\mathbb{P}_1\left(r_s(\omega)<r^*\right)-K\Lambda_{0,s}\mathbb{P}_2\left(r_s(\omega)<r^*\right).
$$

ただし，$\mathbb{P}_1$, $\mathbb{P}_2$ はそれぞれ

$$
\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{Q}}=\frac{\Lambda_{s,T}e^{-f_0^s r(u)du}}{\Lambda_{0,T}},\quad \frac{d\mathbb{P}_2}{d\mathbb{Q}}=\frac{e^{-f_0^s r(u)du}}{\Lambda_{0,s}}
$$

によって与えられる（$\mathbb{Q}$ に関する）密度を有する確率である。$\mathbb{P}_1$ の下での r_s/L_1，および $\mathbb{P}_2$ の下での r_s/L_2 がともに自由度 $4a/\sigma_r^2$ の非心 χ^2 分布に従い，その非心母数がそれぞれ ζ_1, ζ_2 で与えられることは上述のとおりである。したがって，主張の結果を得る。 □

補題 4.1 の証明　引渡し日 $\tau \geq t$ におけるゼロクーポン債の価格は $\Lambda_{\tau,s}$ であるから，無裁定の状況では，時刻 t における先渡し価格 $p_{t,\tau,s}$ は $\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}(\Lambda_{\tau,s})$ となる。ところで，「繰返し期待値の法則」から

$$
\begin{aligned}
\Lambda_{t,\tau}p_{t,\tau,s} &= \Lambda_{t,\tau}\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}(\Lambda_{\tau,s}) \\
&= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_s^\tau r_u du\right)\Lambda_{\tau,s}\right] \\
&= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_t^\tau r_u du\right)\mathbb{E}_\tau^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_\tau^s r_u du\right)\right]\right] \\
&= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\mathbb{E}_\tau^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_t^\tau r_u du\right)\exp\left(-\int_\tau^s r_u du\right)\right] \\
&= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\mathbb{E}_\tau^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_t^s r_u du\right)\right] \\
&= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_t^s r_u du\right)\right] \\
&= \Lambda_{t,s}.
\end{aligned}
$$

したがって

$$
p_{t,\tau,s}=\frac{\Lambda_{t,s}}{\Lambda_{t,\tau}}
$$

を得る。

$\Lambda_{t,s}$ がすべての t に対して s に関して微分可能であるとすれば

$$f(t,\tau)=\lim_{s\downarrow\tau}\frac{\log(\Lambda_{t,\tau})-\log(\Lambda_{t,s})}{s-\tau}=\frac{d}{d\tau}(-\log\Lambda_{t,\tau}),\quad s\geq\tau\geq t.$$

したがって

$$\Lambda_{t,s}=\exp\left(-\int_t^s f(t,u)du\right).$$

命題 4.1 の証明　仮定より　□

$$-\int_t^s r_u du\leq-\int_t^\tau r_u du,\quad s\geq\tau\geq t,\quad \text{w.p.1.}$$

したがって

$$\Lambda_{t,\tau}=\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_t^\tau r_u du\right)\right]\geq\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_t^s r_u du\right)\right]=\Lambda_{t,s},$$

つまり $\log\Lambda_{t,\tau}\geq\log\Lambda_{t,s}$ となる。したがって $s>\tau$ に対して

$$\Phi_{t,\tau,s}\equiv\frac{\log(\Lambda_{t,\tau})-\log(\Lambda_{t,s})}{s-\tau}\geq 0,\quad f(t,\tau)=\lim_{s\downarrow\tau}\Phi_{t,\tau,s}\geq 0.$$

□

補題 4.2 の証明　固定された満期 s に対して，次式で定義される $\mathbb{Q}$ 可測なマルチンゲール M を考える。

$$\begin{aligned}M_t&=\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_0^s r_u du\right)\right]\\&=\exp\left(-\int_0^t r_u du\right)\Lambda_{t,s}\\&=M_0e^{J(t)}.\end{aligned}\tag{A.7}$$

ここで，(30)を用いて

$$J_t=-\log M_0-\int_0^t r_u du-\int_t^s f(t,u)du.\tag{A.8}$$

Girsanov の定理の系であるマルチンゲール表現定理によって，M が $\mathbb{Q}$-マルチンゲールであるから，$\mathcal{L}(\hat{B})$ に属するある $\mathbb{R}^d$ 値過程 η_s に対して次のように表現することができる。

$$M_t=M_0+\int_0^t \eta_s(u)d\hat{B}_u.\tag{A.9}$$

（添字に表されているように，満期日 s における全過程 η_s に依存することに注意せよ。）M は厳密に正であるから，伊藤の補題を用いて，次のとおりに (A.9) を再表現することができる。

$$M_t=M_0e^{K_t}.\tag{A.10}$$

ここで，$H(u,s)=\eta_s(u)/M_u$ に対して

$$K_t = \int_0^t H(u,s)d\hat{B}_u - \frac{1}{2}\int_0^t H(u,s)H(u,s)^{\mathrm{T}}du. \tag{A.11}$$

(A.7)と(A.10)から$J=K$を得る。なぜならば，(A.9)より

$$dM_t = \eta_s(t)d\hat{B}_t.$$

また，(A.10)より

$$K_t = \log M_t - \log M_0, \quad K_0 = 0$$

であるから

$$dK_t = \frac{\eta_s(t)}{M_t}d\hat{B}_t - \frac{1}{2}\frac{\eta_s(t)\cdot\eta_s(t)}{M_t^2}dt.$$

したがって$\mathbb{R}^d$値ベクトル$H(u, s)$を$H(u, s)=\eta_s(u)/M_u$で定義すれば

$$\begin{aligned} K_t &= \int_0^t \frac{\eta_s(u)}{M_u}d\hat{B}_u - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\eta_s(u)\cdot\eta_s(u)}{M_u^2}du \\ &= \int_0^t H(u,s)\,d\hat{B}_u - \frac{1}{2}\int_0^t H(u,s)H(u,s)^{\mathrm{T}}du. \end{aligned}$$

Jを伊藤過程として表現し，そのずれ項と拡散項を計算する必要がある。伊藤過程の一意分解性を用いれば，Jのずれ項と拡散項がKのそれにそれぞれ一致し，したがって，望ましい関係(33)が得られるとしてよい。

(A.8)の項$\int_t^s f(t, u)du$は伊藤過程の積分（uに関する「無限和」)とみなすことができる。伊藤過程の有限和の拡散項は個々の拡散項の和であるから，少なくともある技術的な正則条件の下では，伊藤過程の無限和についても同じ線形性が適用できるものと期待してよい。この場合には，$f(t, u)$の拡散項は$\sigma(t, u)$であったから，Jの拡散項は単に$\int_t^s \sigma(t, u)du$となる（この事実は確率積分に対するFubiniの定理として知られている)。これとKの拡散項が一致することから

$$H(t,s) = \int_t^s \sigma(t,u)du \tag{A.12}$$

を得る。同様に，$\int_t^s f(t, u)du$のずれ項を$f(t, u)$のずれ項の積分（uに関する和）として表し得るための十分な技術的正則条件を仮定すれば，(A.8)から，JとKのずれ項は以下の場合に等しくなる[22]。

$$-\frac{1}{2}H(t,s)H(t,s)^{\mathrm{T}} = -r_s - \int_t^s \mu(t,u)du. \tag{A.13}$$

(A.12) (A.13) を所与とすれば，sに関する偏微分方程式を定義するに十分な条件が満足され，それぞれ以下のようになる。

$$\frac{\partial H(t,s)}{\partial s} = \sigma(t,s)^{\mathrm{T}} \quad \text{(A.12) より} \tag{A.14}$$

(22) (32)から，$f(t, u)$のずれ項は$\mu(t, u)$となる。したがって，J_tのずれ項は$-r_t - \int_t^s \mu(t, u)\,du$となる。

$$H(t,s)\cdot\frac{\partial H(t,s)}{\partial s}=\mu(t,s).\quad \text{(A.13) より} \tag{A.15}$$

なぜならば，(A.12)の両辺を s に関して微分すれば

$$\frac{\partial H(t,s)}{\partial s}=\sigma(t,s)^{\mathsf{T}},$$

(A.13) の両辺を s に関して微分すれば

$$\begin{aligned}
-\mu(t,s)&=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}\big(H(t,s)\cdot H(t,s)\big)\\
&=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}\big(H(t,s)H(t,s)^{\mathsf{T}}\big)\\
&=-\frac{1}{2}\frac{\partial H(t,s)}{\partial s}H(t,s)^{\mathsf{T}}-\frac{1}{2}H(t,s)\left(\frac{\partial H(t,s)}{\partial s}\right)^{\mathsf{T}}\\
&=-\frac{\partial H(t,s)}{\partial s}H(t,s)^{\mathsf{T}}\\
&=-H(t,s)\cdot\frac{\partial H(t,s)}{\partial s}
\end{aligned}$$

を得る。

最後に，(A.12) (A.14) (A.15) を組み合わせることによって

$$\begin{aligned}
\mu(t,s)&=\frac{\partial H(t,s)}{\partial s}H(t,s)^{\mathsf{T}}\\
&=\sigma(t,s)\left(\int_t^s\sigma(t,u)du\right)^{\mathsf{T}}\\
&=\sigma(t,s)\int_t^s\sigma(t,u)^{\mathsf{T}}du.
\end{aligned}$$

を得る。これは所望の基本的な結論 (33) である。 □

補題 4.3 の証明　仮定より，(32) は

$$df(t,s)=\sigma^2(s-t)dt+\sigma dW_t$$

となるから，伊藤の補題より

$$f(t,s)=f(0,s)+\sigma^2t(s-t/2)+\sigma W_t.$$

したがって，$r_t=f(t,t)=f(0,s)+\sigma^2t^2/2+\sigma W_t$。したがって

$$\exp\left(-\int_0^s r_u du\right)=\Lambda_{0,s}\exp\left[-\int_0^s\left(\frac{\sigma^2u^2}{2}+\sigma W_u\right)du\right].$$

同様に，満期 T のゼロクーポン債の時刻 t における価格 $\Lambda_{t,T}$ は

$$
\begin{aligned}
\Lambda_{t,T} &= \exp\left(\int_t^T -f(t,s)ds\right) \\
&= \exp\left[\int_t^T -f(0,s)ds - \int_t^T \sigma^2 t\left(s-\frac{t}{2}\right)ds - \int_t^T \sigma W_t ds\right] \\
&= \exp\left(\int_0^T -f(0,s)ds - \int_0^t -f(0,s)ds - \frac{\sigma^2}{2}tT(T-t) - \sigma W_t(T-s)\right) \\
&= \frac{\Lambda_{0,T}}{\Lambda_{0,t}}\exp\left(-\sigma(T-t)W_t - \frac{\sigma^2 tT(T-t)}{2}\right).
\end{aligned}
$$

r_t に関する上の結果を用いれば，(35) の最右辺の等式が成り立つことはほとんど自明である。 □

命題 4.2 の証明　コールの時刻 0 における価格 C_0 は

$$
C_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_0^s r_u du\right)(\Lambda_{s,T}-K)^+\right]
$$

で与えられるから

$$
\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{Q}} = \frac{\exp\left(-\int_0^s r_u du\right)\Lambda_{s,T}}{\Lambda_{0,T}}, \quad \frac{d\mathbb{P}_2}{d\mathbb{Q}} = \frac{\exp\left(-\int_0^s r_u du\right)}{\Lambda_{0,s}}
$$

によって，確率測度 $\mathbb{P}_1$, $\mathbb{P}_2$ を定めれば[23]

$$
C_0 = \Lambda_{0,T}\mathbb{E}^{\mathbb{P}_1}(1_A) - K\mathbb{E}^{\mathbb{P}_2}(1_A)
$$

と表すことができる。ここで，事象 A は $A = \left\{\omega \middle| \Lambda_{s,T} - K \geq 0\right\}$ を表す。

$\mathbb{Q}$-標準 Brown 運動 W の測度 $\mathbb{P}_1$, $\mathbb{P}_2$ の下での分布を得るために，それぞれの測度の下での Laplace 変換（積率母関数）を計算すれば

$$
\mathbb{E}^{\mathbb{P}_1}\left(e^{\lambda W_s}\right) = \exp\left[\left(-\sigma sT + \frac{\sigma s^2}{2}\right)\lambda + \frac{s}{2}\lambda^2\right], \quad \mathbb{E}^{\mathbb{P}_2}\left(e^{\lambda W_s}\right) = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\lambda + \frac{s}{2}\lambda^2\right).
$$

これは，W が測度 $\mathbb{P}_1$ の下では平均 $-\sigma sT + \sigma s^2/2$，分散 s の，測度 $\mathbb{P}_2$ の下では平均 $-\sigma s^2/2$，分散 s の正規分布に従うことを示す。したがって X, Y をそれぞれ測度 $\mathbb{P}_1$, $\mathbb{P}_2$ に対する標準正規確率変数として

$$
C_0 = \Lambda_{0,T}\mathbb{P}_1\left(X \leq \frac{\sigma\sqrt{s}(T-s)}{2} - \frac{\log(\Lambda_{0,s}K/\Lambda_{0,T})}{\sigma\sqrt{s}(T-s)}\right) - K\Lambda_{0,s}\mathbb{P}_2\left(Y \leq -\frac{\sigma\sqrt{s}(T-s)}{2} - \frac{\log(\Lambda_{0,s}K/\Lambda_{0,T})}{\sigma\sqrt{s}(T-s)}\right).
$$

よって目的の評価公式を得た。 □

(23)　$\mathbb{P}_1$ $\mathbb{P}_2$ が確率測度の要件を満たすことをチェックするのは容易である。

■参考文献

[1] Brace, A. and M. Musiela (1994), "A Multifactor Gauss Markov Implementation of Heath, Jarrow and Morton," *Mathematical Finance*, **4**, 259-283.

[2] Brennan, M. and E. Schwartz (1979), "A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds," *Journal of Banking and Finance*, **3**, 133-55.

[3] Brown, R. H. and S. M. Schaefer (1995), "Interest Rate Volatility and the Shape of the Term Structure," in Howison, S. D., Kelly, F. P. and P. Wilmott ed., *Mathematical Models in Finance*, Chapman & Hall, Chp. 11.

[4] Björk, T. (1997), "Interest Rate Theory," in Biais, B., Björk, T., Cvitanić, J., El Karoui, N., Jouini, E. and J. C. Rochet eds., *Financial Mathematics,* Lecture Notes in Mathematics, 1656, Springer, Chp. 2.

[5] Cox, J. C., Ingersoll, J. E. and S. A. Ross (1985a), "An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices," Econometrica, **53**, 363-384.

[6] _____, _____ and _____ (1985b), "A Theory of the Term Structure of Interest Rates," *Econometrica*, **53**, 385-407.

[7] Delbaen, F. (1993), "Consols in the CIR Model," *Mathematical Finance,* **3**, 125-34.

[8] Dothan, M. (1978), "On the Term Structure of Interest Rates," *Journal of Financial Economics*, **7**, 229-64.

[9] Duffie, D. (1996), *Dynamic Asset Pricing Theory*, 2nd. ed., Princeton. (山崎昭・桑名陽一・大橋和彦・本多俊毅訳『資産価格の理論』創文社)

[10] _____ and R. Kan (1995), "Multi-Factor Term Structure Models," in Howison, S. D., Kelly, F. P. and P. Wilmott, ed., *Mathematical Models in Finance*, Chapman & Hall.

[11] _____ and W. Zame (1989), "The Comsumption-Based Capital Asset Pricing Model," *Econometrica*, **57**, 1279-97.

[12] Heath, D., Jarrow, R. and A. Morton (1992), "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation," *Econometrica*, **60**, 77-105.

[13] Hicks, J. (1939), *Value and Capital*, 2nd ed., Oxford University Press. (安井琢磨・熊谷尚夫訳『価値と資本』岩波書店)

[14] Ho, T. and S. Lee (1986), "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims," *Journal of Finance*, **41**, 1011-29.

[15] Ikeda, N. and S. Watanabe (1989), *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes,* 2nd ed. North-Holland.

[16] Jamshidian, F. (1989), "An Exact Bond Option Formula," *Journal of Finance*, **44**, 205-9.

[17] Karatzas, I. and S. E. Shreve (1991), *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, 2nd. ed., Springer.

[18] Karlin, S. and H. M. Taylor (1981), *A Second Course in Stochastic Processes*, Academic.

[19] Keynes, J. M. (1936), *The General Theory of Employment, Interest and Money*, Macmillan. (塩野谷裕一訳『雇用，利子および貨幣の一般理論』東洋経済新報社)

[20] Merton, R. (1974), "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates," *Journal of Finance*, **29**, 449-70.

[21] Pitman, J. and M. Yor (1982), "A Decomposition of Bessel Bridges," *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie*, **59**, 425-57.

[22] Rogers, L. C. G. (1995), "Which Model for Term-Structure of Interest Rates Should One Use?" in Davis, M. H. A., Duffie, D., Fleming, W. H. and S. E. Shreve ed., *Mathematical Finance*, Springer, 93-115.

[23] _____ and D. Williams (1987), *Diffusions, Markov Processes, and Martingales Vol. 2, Itô Calculus*, Wiley.

[24] Roll, R. (1971), "Inverstmanet Diversification and Bond Maturity," *Journal of Finance*, **26**, 51-66.

[25] Samuelson, P. A. (1939), "Interactions between the Multiplier Analysis and the Principle of Acceleration," *Review of Economic Statistics*, **21**, 75-78.

[26] Vasicek, O. (1977), "An Equilibruim Characterization of the Term Structure," *Journal of Financial Economics*, **5**, 177-88.

[27] Yamada, T. and S. Watanabe (1971), "On the Uniqueness of Solutions of Stochastic Differential Equation," *Journal of Mathematics of Kyoto University*, **11**, 155-67.

[28] 赤壁弘康(1998)「連続時間設定における無裁定証券価格評価理論の基本的フレームワーク」日本経営財務研究学会編『コーポレート・ファイナンスの理論と実証』(経営財務研究双書**18**) 135-81。

[29] 木島正明(1999)『期間構造モデルと金利デリバティブ』朝倉書店シリーズ (現代金融工学) **3**。

[30] 竹内啓(1994)『統計的方法』岩波講座応用数学[方法**11**] 岩波書店。

[31] 日本数学会 (編) (1985)『岩波数学辞典』第3版岩波書店。