ID	JJF00195

論文名	平均下方部分積率モデルのアセットアロケーションへの適用と平均分散モデルとの比較
	Application of the mean lower partial moments model to asset allocation: A comparison with the mean variance model
著者名	竹原均
	Hitoshi Takehara
ページ	23-40

雑誌名	経営財務研究
	Japan Journal of Finance
発行巻号	第21巻第1号
	Vol.21 / No. 1
発行年月	2001年6月
	Jun. 2001
発行者	日本経営財務研究学会
	Japan Finance Association
ISSN	2186-3792

■論　文

平均下方部分積率モデルのアセットアロケーションへの適用と平均分散モデルとの比較

竹原　均
（筑波大学）

要　旨

本研究では，投資対象資産クラスを機関投資家にとって現実的な範囲に固定し，かつ過去の資産収益率を用いた予測を行うという条件の下で，平均下方部分積率モデルのアセットアロケーション問題への適用について検討する。検証の結果，平均分散モデルと比較して低リスク高リターンのポートフォリオが構築される保証は無いことを示し，その原因の一つとして資産収益率の系列相関について議論する。

1　平均下方部分積率モデル

平均分散モデル（Mean Variance Model）はH. Markowitzによる提起以来，資本資産価格評価モデル（CAPM）に代表される理論的モデルに基礎を与えただけでなく，実務家の投資リスク管理のためのツールとして広く用いられてきた。しかし，当初から指摘されたように，平均分散ポートフォリオ選択基準のもとで最適なポートフォリオが，期待効用最大化基準においても最適なポートフォリオであるためには，前提条件としてポートフォリオの収益率が正規分布に従うか，あるいは投資家が2次効用関数を持つことが必要とされた。

しかしArrow（1971），Pratt（1964）らが指摘しているように，効用関数は絶対危険回避尺度が減少関数であることが望ましいのに対して，2次効用関数は絶対危険回避尺度が増加関数となりエコノミストや最適投資基準の研究者にとってはその仮定を受け入れることは難しい。また証券収益率分布の正規性についても過去の多くの実証結果から疑問が投げかけられているし，かつ仮に原証券収益率が正規分布に従うとしても，派生証券の組入れによりポートフォリオ収益率分布にはトランケーションが発生する。したがってポートフォリオの最適性の基準として平均分散基準は理論面からは妥当であるとはみなせず，むしろ期待効用の近似として，あるいは最適ポートフォリオの計算の容易さから使用されているモデルであると言える。

このため過去において運用手法が高度化，多様化していく段階で，理論と実用の両面で優れた代替モデルの必要性は高かった。新たなリスク尺度としての下方部分積率（Lower Partial Moments: LPM）の研究もこのことを目的として進められた。投資家のリスク尺度を，2次の下方部分積率モデルにより与えることはBawa（1975）により行われ，一般のk次下方部分積率への拡張はFishburn（1977）によりなされた。これらの研究においては，平均下方部分積率モデルと確率優位規則との関係が数学的に証明されている。収益率に関する一切の仮定を置かず，効用関数は絶対危険回避尺度減少である場合に，TSD（3次確率優位，Third order Stochastic Dominance）がポートフォリオの最適性の基準となることから理解されるように，確率優位の概念は理論のフレームワークとしては非常に強力なものである。

一方で，確率優位の意味で最適なポートフォリオを計算するアルゴリズムを構成することは難しい。しかし平均下方部分積率モデルを用いれば，確率優位の意味での効率的ポートフォリオ集合の精度の良い近似が高速に計算可能である。このため平均下方部分積率モデルは理論面だけでなく実務上も有効なツールとなりうると考えられる。

Bawa，Lindenberg（1977）は，目標収益率を安全資産利子率で与えたときの均衡価格を導き，平均下方部分積率モデルを用いてCAPMライクな資産価格評価が可能であることを示した。さらに実用上の観点からは，Harlow（1991）が，米国の株式と債券の2資産アセットアロケーション問題に対して，平均下方部分積率モデルを適用し，同モデルの有効性を示唆する実証結果を得た。また我が国市場に関しては竹原（1994）が，資産クラスを日米7資産に拡大した場合に，やはり平均下方部分積率モデルの有効性が部分的に支持されることを示している。

しかしながら平均下方部分積率モデルではシナリオという形式で予測を与えなければならず，Harlow（1991），竹原（1994）ともに，過去5年の収益率により将来の資産収益率の予測を代替しており，この点で先行研究での検証は限定的なものと言わざるをえない。実務家の間ではアセットアロケーションの策定において，3～10年といった長期の過去資産収益率から得られた期待収益率，共分散行列を平均分散モデルへの入力とすることが一般的である。しかし実際の資産収益率，特に株式収益率に関しては循環的な要素が含まれるため，過去の収益率を直接予測に用いた場合，推定に用いたデータが上昇期（後退期）のものであった場合に，平均下方部分積率モデルはリスクを過小評価（過大評価）する可能性がある。

そこで本研究では過去の実現収益率を直接用いて推定を行うことを前提とするが，その際に使用するデータの期間数を変化させて，その影響が平均下方部分積率モデルにどのように現れるかを検証する。結果として事後的な実現収益率を調べる限り，平均下方部分積率モデルは平均分散モデルに比較して，必ずしも良好と言える結果をもたらさないことを示す。そして確率優位の意味で効率的なポートフォリオの近似という点で理論的には優れた平均下方部分積率モデルが，実用上は必ずしも優位性を持たないことの原因の一つとして，各資産の収益率の系列相関について言及する。そしてこの問題の検証のために乱数発生によって系列相関を破壊したデータ生成を行い，シミュレーションにより平均下方部分積率モデルの振る舞いについて考察を加える。

論文は以下のように構成される。まず次節において，平均下方部分積率について概観し，3節においては使用するデータと検証方法について説明する。4節ではバックテストの結果を要約し，平均下方部分積率モデルの与える最適ポートフォリオの性質について議論する。5節では，推定に用いる期間数の系列相関の影響を明らかにするために，乱数を用いた使用データの順序の入替えをともなうバックテストを行う。最後に6節では結論を述べるとともに実用上の問題点について議論する。

2　資産選択モデルとしての記述と最適ポートフォリオの決定要因

ポートフォリオの収益率をπ，その確率密度を$f(\pi)$，最小許容収益率をθとすれば，k次下方部分積率（Lower Partial Moments：LPM）は以下の（1）式により定義される。

$$LPM_k(\theta)=\int_{-\infty}^{\theta}(\theta-\pi)^k f(\pi)d\pi \tag{1}$$

ここで，ポートフォリオの収益率がどのように与えられるかが問題となるが，多変量かつ正規性を持たない連続型の分布を想定することは，第一に推定の点で問題があるし，仮に推定が可能であるとしても，最適ポートフォリオを求める際に多重積分を頻繁に行わねばならず，実際の計算は非常に困難である。したがって現実的な計算機使用時間内に最適ポートフォリオを求めることを可能とするためには，収益率分布をシナリオ形式で離散的に与える必要がある。

投資対象として証券市場にn資産（1, 2,..., n）が存在し，投資家は来期の状況についてのm個の投資シナリオを既知であるものとする。ここでは簡単化のためすべてのシナリオの実現確率はすべて等しいと仮定する。第jシナリオが実現したときの収益率を$p_j=(p_{j1}, p_{j2},\ldots, p_{jn})^t \in R^n$とし，またポートフォリオを$x=(x_1, x_2,\ldots, x_n)^t$とすれば，$j$シナリオでのポートフォリオの収益率は

$$\pi_j=\sum_{i=1}^{n} p_{ji}x_i \tag{2}$$

となるから，$\pi=(\pi_1, \pi_2,\ldots, \pi_m)^t$とすれば，目標収益率$\theta$が与えられたときの$LPM_k(\theta)$は，

$$LPM_k(\theta)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\max(\theta-\pi_i,\ 0)\right)^k \tag{3}$$

となる。第j資産の期待収益率は，$r_j=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} p_{ij}$により与えられるから，期待収益率ベクトル$r$を$r=(r_1, r_2,\ldots, r_n)^t$と定義する。またポートフォリオ期待収益率を$\mu \in R$，ベクトル$e=(1, \ldots, 1)^t \in R^n$とし，予算制約を$e^tx=1$とすれば，下方部分積率モデルを用いた資産選択問題は以下の問題（4）に帰着される。

$$\begin{aligned}
&\text{Minimize} && LPM_k(\theta)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\max(\theta-\pi_i,\ 0)\right)^k,\\
&\text{Subject to} && \pi_j=\sum_{i=1}^{n} p_{ji}x_i,\quad j=1,\ldots,m,\\
& && e^tx=1,\\
& && r^tx=\mu.
\end{aligned} \tag{4}$$

さらに運用規制などの実務上の制約も考慮に入れるならば，以下の非線形計画問題（5）を解くことにより最適ポートフォリオx^*を得る。

$$\begin{aligned}
&\text{Minimize} && LPM_k(\theta)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\max(\theta-\pi_i,\ 0)\right)^k,\\
&\text{Subject to} && \pi_j=\sum_{i=1}^{n} p_{ji}x_i,\quad j=1,\ldots,m,\\
& && e^tx=1,\\
& && r^tx=\mu,\\
& && b_u \geq Ax \geq b_l,\\
& && u \geq x \geq l.
\end{aligned} \tag{5}$$

このため最適ポートフォリオは，期待収益率μ，最低許容収益率θ，ペナルティー次数k，及び制約

条件により決定される。下方リスク尺度としての下方部分積率（LPM）は，本来（1）の形式で定義されるものの，実際の計算上はHarlow（1991）でも，（4）の形式に帰着した上で，さらにペナルティー次数$k=1, 2$に固定して，線形計画問題／2次計画問題として最適ポートフォリオを求める。

さて最適化問題（5）と同様にシナリオが与えられたときの，平均分散モデルの下での最適ポートフォリオは，以下の問題（6）

$$
\begin{aligned}
\text{Minimize} \quad & \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\pi_i-\mu)^2, \\
\text{Subject to} \quad & \pi_j=\sum_{i=1}^{n}p_{ji}x_i, \quad j=1,\ldots,m, \\
& e^t x=1, \\
& r^t x=\mu, \\
& b_u \geq Ax \geq b_l, \\
& u \geq x \geq l.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

の解として与えられるため，平均分散モデルと平均下方部分積率モデルの比較を行うためには，問題（5），（6）に含まれるパラメータμ，問題（5）に特有のθ，kに加えて，さらにシナリオの与え方，アセットクラスの設定などの諸条件を含めて考慮して，それらの組合せにより検証を行う必要があり，このため事実上検証は不可能である。Harlow（1991）にしても，ごく限られた状況下での検証により平均下方部分積率モデルの実用上の効果を支持するものであり，その結果を根拠としてのモデル評価は危険である。そこで本論文では，考えられる組合せの部分集合ではあるが，より詳細な検証を行い，必ずしも平均下方部分積率モデルが有効ではないケースが存在することを示す。

ここでは検証の前提として，

- 投資家は直近のm期間の実現収益率を来期の予測シナリオとして用いる
- 平均下方部分積率モデルにおいてペナルティー次数$k=2$
- 投資対象は国内株式，転換社債，債券，貸出金，安全資産，米国株式，債券の7資産
- 運用制約として，貸出金上限を10%，外貨建資産の組入れ比率30%以下

としよう。

第1の条件は，多くの機関投資家がアセットアロケーションを過去数年の収益率に基づいて策定している現状に沿うものである。このような資産収益率の過去の実績値による予測の根拠は，資産収益の従う定常な確率分布が存在し，そこからの標本として直近の実現収益率が記録されているという仮定にある(1)。もし投資家が収益率の確率分布に関して先見情報を持たないならば，この方法はベイズの意味で最適である。逆に何らかの情報を保有しているならば，アセットアロケーションのための予測としては次善的方法にすぎない。

第2の条件は平均分散モデルとの比較を行うために必要とされる。また第3の条件は我が国の機関投

(1) こうした予測方法はSimple Probability Assesment Approach（SPAA）とも呼ばれ，Grauer and Hakansson（1982，1987）等のCRRAなクラスの効用関数を用いたアセットアロケーションに関する実証分析においても用いられた。

表1　投資対象資産及びベンチマークインデックス

	No.	資産名	ベンチマーク	制約条件
国内	1	日本株	TOPIX	
	2	転換社債	CB-BM	
	3	債券	野村債券インデックス（総合）	
	4	貸出金	長期プライムレート	10%以下
	5	安全資産	無条件コール	
国外	6	米国株	S&P500	海外資産30%以下
	7	米国債	シェアソンリーマン債券インデックス	

資家の投資対象として妥当な範囲であるし，第4の条件は年金の運用規制（いわゆる5:3:3:2規制）程度までポートフォリオに制約を与えると事実上最適ポートフォリオが固定してしまうため，そのような状況を回避しつつ，比較的ゆるやかでかつ実際的と思えるものとした(2)。よって，以上の4条件を認めるならば，最適ポートフォリオは期待収益率μ，最少許容収益率θ，そして推定に用いるサンプル数mにより決定される。そこで次節ではμ，θ，kの3条件を変更して，平均下方部分積率モデル，平均分散モデルから得られる最適ポートフォリオについて分析を行う。

3　データ及び検証方法

我々の分析において投資対象とする資産クラス，及び各資産についてベンチマークとして用いるインデックスを表1に示す。これらのベンチマークに基づいて，アロケーションの更新間隔を3ヶ月と想定して，1976年第1四半期から1993年第2四半期までの四半期収益率データ（70期間）を計算した。なお，米国株式と米国債に関しては，為替ヘッジ比率を非明示的に取り扱うために，フルヘッジ，ノーヘッジの2資産に分けて取り扱うため対象資産は擬似的に9資産となる。各アセットクラスの平均，標準偏差，歪度，自己相関を表2に示す。

歪度が0でないことが示すように，これらの収益率の分布には歪みが存在し，正規分布と比較してより下方の裾野の広い分布であることがわかる。もし収益率が正規分布に従わないとすれば，正規分布を前提条件としない平均下方部分積率モデルを投資家は政策の決定に用いるべきである。

系列相関については，自己相関係数からは当然のことながら貸出金（長期プライムレート）と安全資産（コールマネーレート）について非常に高い値が観測される他には明らかな傾向は見出せない。しかし今回の検証においては過去数年という長期間のデータを用いるため，系列相関についてはより詳細に調べる必要がある。ここではPoterba and Summers（1988）で用いられた分散比検定を行い，今回使用したデータに関して長期の系列相関が存在するかを確認しておこう。

表3に示された分散比から，資産収益率がランダムウォークに従うとは言い難く，収益率に長期での負の相関が存在する可能性が示唆された。もし収益率に平均回帰的な性質が存在するならば，過去の収

(2)　企業年金の運用に関する5:3:3:2型規制については既に撤廃された。

表2　投資対象資産クラスの平均，標準偏差，歪度，自己相関係数

資産クラス	平均	標準偏差	歪度	lag＝1	lag＝2	lag＝3	lag＝4
日本株	2.762	9.405	−0.973	−0.101	0.108	0.068	−0.033
転換社債	2.308	6.161	−0.466	0.060	−0.013	0.132	0.055
債券	2.009	2.459	−0.278	−0.088	−0.037	0.353	0.029
貸出金	1.851	0.328	−0.245	0.920	0.811	0.701	0.581
コール	1.496	0.488	0.898	0.897	0.718	0.518	0.322
米国株（ヘッジ無）	1.237	9.091	−1.192	0.027	−0.174	0.046	−0.022
米国債（ヘッジ無）	1.219	6.632	0.391	0.133	0.105	0.115	−0.022
米国株（フルヘッジ）	1.869	7.593	−0.467	0.058	−0.102	−0.109	−0.123
米国債（フルヘッジ）	1.890	4.357	0.593	−0.069	0.064	0.129	0.061

表3　資産収益率の分散比（半年〜10年）

期間	日本株	CB	国債	貸出金（長ブラ）	コール	米国株（0%）	米国債（0%）	米国株（100%）	米国債（100%）
0.5	0.89	0.94	0.84	0.53	0.54	1.11	0.86	1.10	0.86
2	1.14	1.09	1.23	1.75	1.42	0.77	0.93	0.62	1.19
3	1.34	1.15	1.17	2.24	1.40	0.67	0.89	0.50	1.24
4	1.22	1.07	0.90	2.52	1.34	0.53	1.00	0.48	1.32
5	0.97	0.85	0.83	2.74	1.38	0.45	0.74	0.48	1.34
6	0.72	0.64	0.77	3.06	1.80	0.32	0.47	0.39	1.33
7	0.47	0.43	0.61	3.40	2.53	0.22	0.24	0.41	1.38
8	0.31	0.25	0.41	3.38	2.07	0.16	0.20	0.43	1.14
9	0.21	0.16	0.28	3.35	1.50	0.09	0.12	0.40	1.09
10	0.15	0.10	0.21	3.06	0.96	0.09	0.15	0.29	0.96

表中第1列の期間の時間単位は年，同期間の月次データより計算。したがって重複を認めた1年間の累積収益率の分散を$V(1)$，k年間の累積収益率$V(k)$とするとき，分散比は$(V(k)/k)/V(1)$により定義される。収益率がランダムウォークに従うとき分散比は1，負の系列相関を持つとき1より小さな値をとる。分散比の性質に関してはPoterba and Summers（1988）参照。

益率により将来の資産収益率分布を代替した場合に，平均下方部分積率モデルについてポートフォリオのリスクが適切に評価されない状況が発生することも考えられるが，この点については期間数mを変化させたテストにより知見を得ることが可能であろう。

さて我々は平均下方部分積率モデルと平均分散モデルからの最適ポートフォリオの差を「バックテスト」により評価する。バックテストとは，過去の十分な長さの資産収益率が入手可能であるときに，過去の特定時点で入手可能な情報のみに基づいて，その時点での意思決定を行い，次期の資産収益率から投資結果を得るという一連のプロセスの繰り返しである。投資行動の市場価格に与える影響は評価されないが，運用手法の与える事後的な収益率の評価手法としてはもっとも一般的である。

ここでは期待収益率μ，目標収益率θ，そして推定に用いるデータ期間数mの投資パフォーマンスに与える影響を検証するために以下のバックテストを行う。

(1) 期待収益率μの影響の分析

目標収益率$\theta=0\%$，$\theta=1.375\%$（$=5.5\%/4$），期間数$m=20$（過去5年）に固定し，リスク

態度の異なる5種類のポートフォリオを構築することにより，期待収益率μの違いが事後パフォーマンスに与える影響を分析する。

(2) 目標収益率θの影響の分析

期待収益率μについては株式の組入れ比率を高めたより危険許容的な設定，またデータ期間数$m=20$に固定し，目標収益率$\theta=-1, -0.8, \ldots, 0.8, 1.0\%$（四半期）として，目標収益率$\theta$の影響を分析する。

(3) 推定に用いるデータ期間数mの影響の分析

期待収益率μについては株式の組入れ比率を高めたより危険許容的な設定，目標収益率に関しては$\theta=0\%$に固定する。その上で期間数$m=8, 9, \ldots, 39, 40$（2年から10年）と変化させて，mが投資結果に与える影響を検証する。

ポートフォリオの期待収益率μは，Harlow（1991）の分析と同様に政策ポートフォリオを想定し，政策ポートフォリオの過去の実現収益率をもって（5）式のμを与える。ただし，Harlowの分析は株と債券の2資産に対する配分を扱っているのに対して，本研究ではより広く7資産を扱っているので，まず，国内債券20%，貸出金10%，米国株式（50%ヘッジ）10%，米国債券（50%ヘッジ）10%の計50%を固定比率で投資し，残りの50%を株式とコールに投資する。ここで株式，コールマネーへの投資比率によって，投資家の危険許容度を反映させる。すなわち政策ポートフォリオにおいて株式の組入れ比率を高めるならば，入力パラメータμも高くなるため，より危険許容的なポートフォリオが構築される。また上述の（1），（2），（3）に共通してポートフォリオのリバランスは四半期ごとに行うと仮定し，売買手数料，有価証券取引税，市場インパクトについてはこれを考慮しない。

4 入力パラメータの投資パフォーマンスに与える影響

本節では，期待収益率μ，目標収益率θ，期間数mの3種類の入力が，バックテストの結果として得られる事後的な投資パフォーマンスにどのような影響を与えるかについて見ていくことにしよう。

(1) 期待収益率μの影響

このテストでは資産収益率の従う分布の推定に20期間のデータを必要とするため，テスト期間は1981年第1四半期から1993年第2四半期の50期間となる。推定に用いる収益率の期間数は前節で述べたように$m=20$（過去5年）に固定し，目標収益率はHarlow（1991）が用いている$\theta=0.0$と，テスト期間での年金資産の予定運用利回りを考慮して$\theta=1.375$（$=5.5/4$）の2種類としている。政策ポートフォリオにおいて日本株の占める比率は，50，40，30，20，10，0%として，同一の状況で6種類の異なる期待収益率μを設定した。表4にバックテスト結果の要約を示す。

目標収益率θが0%の場合の結果は，Harlow（1991）が米国市場について得た結果と同様に，全般的な傾向としては平均下方部分積率モデルが平均分散モデルに対して支配的である。表から読み取れるように，特に目標収益率$\theta=0$で株式の組入れ比率が比較的高い場合に，平均下方部分積率モデルは，より（LPMの尺度で）低リスクで高リターンのポートフォリオを与える。ここでは転換社債が投資対象に含まれるため，実際にポートフォリオに組み込まれる日本株の比率は政策ポートフォリオよりは低くなるものの，政策ポートフォリオと構築されたポートフォリオでの株式組入れ比率の平均値はほぼ比例関係にあることが示された。また同一のμの設定では，平均分散モデルと平均下方部分積率モデルで，

表4　期待収益率μと実現収益率

	平均	S.D.	$\sqrt{LPM(0)}$	$\sqrt{LPM(1.375)}$	最小値	$P(r<0)$	平均株式組入
平均分散モデル							
株50：コール 0	1.721	4.126	2.724	5.467	−12.170	0.140	22.152
株40：コール10	1.632	3.325	2.145	5.046	−9.936	0.120	16.442
株30：コール20	1.580	2.567	1.553	4.669	−7.702	0.140	11.640
株20：コール30	1.578	1.873	0.998	4.338	−5.468	0.100	8.160
株10：コール40	1.571	1.215	0.493	4.110	−3.113	0.080	5.015
株0 ：コール50	1.567	0.620	0.078	3.981	−0.552	0.020	2.181
平均下方部分積率モデル（目標収益率 $\theta=0\%$）							
株50：コール 0	1.853	4.144	2.587	5.367	−10.460	0.160	21.803
株40：コール10	1.703	3.347	2.043	4.999	−8.774	0.180	15.624
株30：コール20	1.632	2.658	1.538	4.673	−7.299	0.180	11.276
株20：コール30	1.663	2.056	1.013	4.344	−4.588	0.120	7.704
株10：コール40	1.711	1.725	0.710	4.156	−3.323	0.120	4.247
株0 ：コール50	1.696	1.340	0.339	4.029	−1.680	0.080	1.516
平均下方部分積率モデル（目標収益率 $\theta=1.375\%$）							
株50：コール 0	1.724	3.960	2.469	5.341	−10.979	0.140	21.155
株40：コール10	1.534	3.201	1.997	5.047	−9.345	0.160	14.977
株30：コール20	1.443	2.480	1.492	4.738	−7.237	0.160	10.238
株20：コール30	1.458	1.797	0.904	4.416	−4.013	0.140	6.784
株10：コール40	1.511	1.185	0.430	4.158	−2.190	0.100	3.649
株0 ：コール50	1.497	0.630	0.091	4.052	−0.645	0.020	1.462

ほとんど組入れ比率に差は見られない。

次に特に注目すべき点として，政策ポートフォリオの株式組入れが30%以上の場合には，平均分散モデルと比較して，平均下方部分積率モデルから得られる事後的な収益率は，より低い下方リスク，そしてより高い最小収益となることがあげられる。このことは平均下方部分積率モデルが投資家にとって最悪の状況を回避するように有効に働いていることを示している。一方，収益率が負となる確率は逆に平均分散モデルの方が小さくなっており，事後的に下方リスクが低く抑えられることと，目標収益率を下回る確率が抑えられることは一致していないことがわかる。このことは（1）式から理解されるように，下方リスクが目標収益率を下回る「確率」と下回る「規模」から決定されることに起因すると思われる。Leibowitz and Henriksson（1989）による'Confidence limit approach'では正規分布の仮定のもとに下方リスクを確率のみで与えるが，本来下方リスクとは確率密度とshortfallの規模の両方から定義されるべきである。

(2) 目標収益率 θ の影響

(1)で検証した期待収益率μの設定について，目標収益率$\theta=0\%$，1.375%に共通して，より危険許容的なときに平均下方部分積率モデルが低リスク高リターンとなる結果が得られた。そこでここでは株式の組入れ比率を50%として，目標収益率θの影響を調べる。表5に目標収益率θ＝を−1，−0.8，…，

表5　目標収益率θのパフォーマンスへの影響

モデル	収益率平均	標準偏差	最小値	*Prob.* ($r<0$)	株式平均組入率（%）
平均分散モデル	1.721	4.126	−12.170	0.140	22.152
$MLPM_2$ (−1.0)	1.742	4.228	−12.313	0.180	21.261
$MLPM_2$ (−0.8)	1.747	4.210	−11.943	0.180	21.066
$MLPM_2$ (−0.6)	1.789	4.198	−11.572	0.180	21.097
$MLPM_2$ (−0.4)	1.778	4.183	−11.201	0.180	21.423
$MLPM_2$ (−0.2)	1.795	4.168	−10.830	0.180	21.208
$MLPM_2$ (0.0)	1.853	4.144	−10.460	0.160	21.803
$MLPM_2$ (0.2)	1.854	4.114	−10.491	0.140	21.531
$MLPM_2$ (0.4)	1.785	4.102	−10.574	0.140	21.395
$MLPM_2$ (0.6)	1.760	4.087	−10.657	0.140	21.368
$MLPM_2$ (0.8)	1.773	4.046	−10.740	0.140	21.229
$MLPM_2$ (1.0)	1.758	4.008	−10.823	0.140	21.313

0.8, 1.0%（したがって年次収益率では−4～4%）に変更したときの結果を示す。

表5が示しているように，目標収益率の変化は構築されるポートフォリオの性格を大きく変えてはいない。しかし収益率標準偏差，収益率最小値の推移が示しているように，より高い目標収益率に対して，構築されたポートフォリオから得られる事後的な収益率のリスクは低くなっている。

(3) 推定に用いる期間数 m の影響

最後に推定に用いるデータ数を変更することがポートフォリオにどのような変化をもたらすかを検証する。期待収益率μの設定についてはこれまでと同様に政策ポートフォリオの株式組入れ比率を50%として比較的リスクを許容的に設定，また目標収益率は$\theta=0$%とした。ここで推定に用いるデータ数mに関しては$m=8, 9, 10, \ldots, 39, 40$（過去2～10年）とする。したがって70期間のデータのうち最大で40期間は推定に用いられるため，テスト期間はすべてのmの値に共通して1986年以降の30期間となる。

図1にバックテストの結果得られた30期間のポートフォリオ収益率の平均を示した。図1において実線が平均分散モデル，破線が平均下方部分積率モデルの平均収益率を示している。次に図2は横軸に下方リスク（2次下方部分積率の平方根，$\sqrt{LPM_2(0)}$），そして縦軸に実現収益率をとり，各mについてのパフォーマンスを示したものである。平均分散モデルについては白抜きの逆三角形とその上部にmを示し，同様に平均下方部分積率モデルについては塗りつぶしの三角形とその下部にmを示している。

これまでの分析ではすべて$m=20$（5年）に固定して分析を行った。平均分散モデルを適用する際に特に共分散の推定については5～10年のデータに基づく推定が一般的に行われる。また7資産（擬似的に9資産）を対象としたアセットアロケーションでは共分散行列が正定値であることを保証するために最低でも7期間以上のデータを使用しなければならない。

図1，2が示すように推定に用いた期間数は平均分散モデルと平均下方部分積率モデルの両方の事後収益率に対して最も大きな影響を与える。また平均分散モデルと平均下方部分積率モデルのパフォーマンスの差に注目するならば，期間数mとの間に以下のような規則性が観測された。まず期待収益率だ

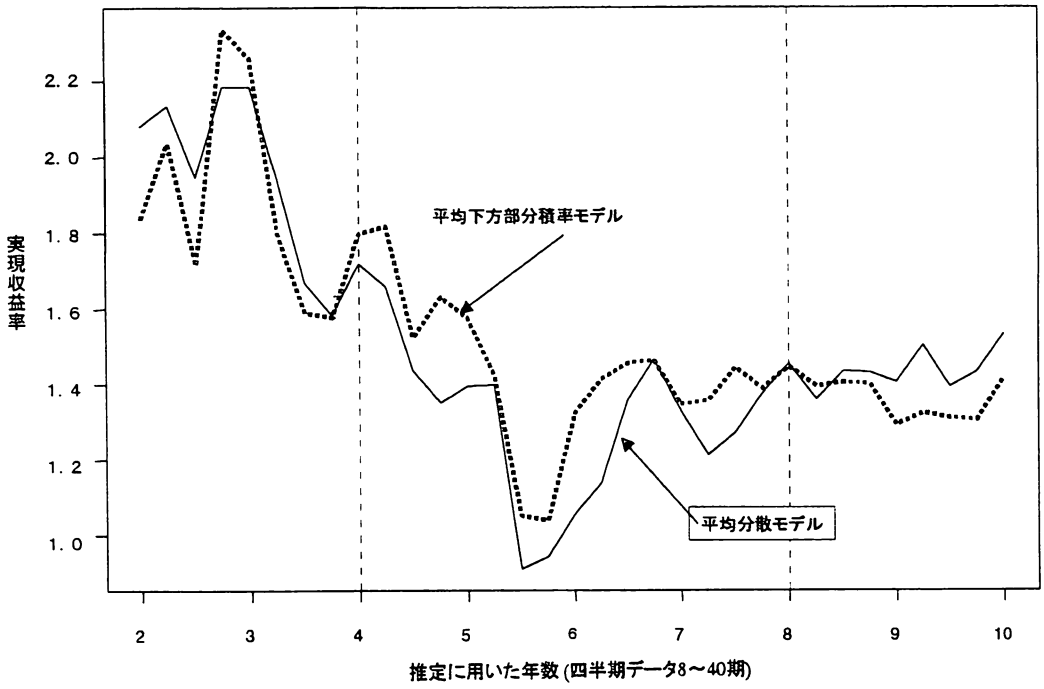

図1　期間数 m の変化のポートフォリオ実現収益率に与える影響

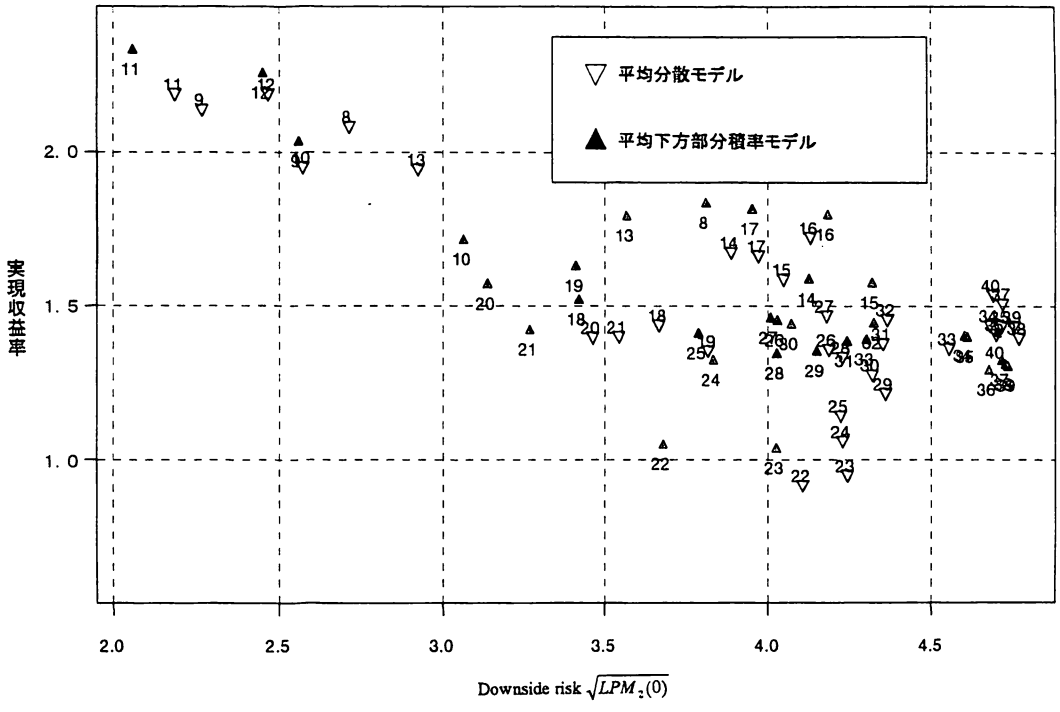

図2　平均－下方リスク平面上でのパフォーマンス

表6　推定に用いた期間数とポートフォリオ収益率の統計量，パフォーマンス尺度

期間	モデル	平均	標準偏差	$\sqrt{LPM_2(0)}$	最小値	$Prob(r<0)$	シャープ比	LPM評価尺度
2年	MV model	2.079	4.488	2.714	−14.337	0.133	0.182	0.301
	MLPM model	1.837	5.331	3.812	−20.046	0.133	0.108	0.151
3年	MV model	2.184	4.559	2.467	−10.640	0.133	0.200	0.374
	MLPM model	2.259	4.554	2.450	−11.053	0.167	0.216	0.407
4年	MV model	1.719	5.756	4.132	−17.850	0.133	0.078	0.111
	MLPM model	1.798	5.914	4.185	−17.341	0.133	0.089	0.128
5年	MV model	1.395	5.055	3.464	−12.170	0.167	0.026	0.038
	MLPM model	1.574	4.886	3.139	−10.823	0.167	0.063	0.099
6年	MV model	1.056	5.781	4.230	−13.985	0.233	−0.035	−0.049
	MLPM model	1.326	5.636	3.835	−13.239	0.267	0.011	0.017
7年	MV model	1.330	5.861	4.230	−14.901	0.233	0.011	0.016
	MLPM model	1.347	5.755	4.028	−14.839	0.233	0.014	0.021
8年	MV model	1.453	6.076	4.365	−15.996	0.233	0.031	0.044
	MLPM model	1.447	6.159	4.324	−15.732	0.267	0.030	0.043
9年	MV model	1.404	6.578	4.705	−17.711	0.300	0.021	0.030
	MLPM model	1.293	6.534	4.682	−16.801	0.300	0.005	0.007
10年	MV model	1.533	6.556	4.695	−18.733	0.267	0.041	0.058
	MLPM model	1.415	6.546	4.708	−18.781	0.300	0.023	0.033

推定に用いた期間数は単位を年で表示しているため，2年が最適化問題（5）において$m=8$の場合となる。検証期間は1986年以降の30四半期で，表中のすべての数字はバックテストの結果得られた各ポートフォリオの四半期収益率をもとにしている。

けを見れば2～3年の短期のデータを用いた方が今回のテスト期間については実現収益率は高く，また平均分散モデルの方が平均下方部分積率モデルと比較してさらに良好な結果を残している。これが4～7年では逆に平均下方部分積率モデルが平均分散モデルと比較して実現収益率の平均が高く，さらに8～10年ではモデル間の差が不明瞭になる。このことは平均下方リスク平面上での分布を調べた図2でも明らかで，過去5年程度（$m=20$）付近で平均下方部分積率モデルの適用により平均分散モデルと比較して低リスク高リターンのポートフォリオが構築されるが，より長期ではモデル間にリスク，リターンともほとんど差が見られず図の右端中央にプロットが集中する。

過去2，3，…，10年のデータを用いてアセットアロケーションの設定を行ったときの，実現収益率，標準偏差，下方リスク（$\sqrt{LPM_2(0)}$），最小値，事後収益率が負となる確率，シャープ尺度(3)，標準偏差ではなく下方リスク（$\sqrt{LPM_2(0)}$）により調整された評価尺度を表6に示した。計66種類（モデル2種類，期間数33種類）の各ポートフォリオの平均株式組入れ比率は最低16.8%～最高39.2%(4)であり，株式の組入れはそれほど高いものではない。さらに同一の期間数mについて平均分散モデルと平均下

(3)　ただしここでは安全資産のベンチマークであるコールマネーレートが系時的に変動しているため，コールマネーレートからのポートフォリオ超過収益率平均をポートフォリオ標準偏差で除した値を用いている。

(4)　株式と転換社債の2資産合計の平均組入れ比率でも26.4～47.7%であり，50%を超えることはない。

方部分積率モデルでの平均株式組入れの差は最大でも2.7%とほとんど差は見られない。しかしそれにもかかわらずモデルの違いは年次収益率で1%以上の収益率の差を発生させる。

5 収益率の系列相関と下方リスクモデル

前節での3種類のバックテストから得られた結果は，平均下方部分積率モデルと平均分散モデルで，ポートフォリオの実現パフォーマンスが以下のように異なることを明らかにした。

まず政策ポートフォリオの株式の組入れ比率が大きく，結果として期待収益率μが高く設定される場合に平均下方部分積率モデルについて，（より低リスク高リターンという意味で）良好な結果が得られた。ここでは海外資産への投資比率を制約条件で30%以下に抑えているので，ポートフォリオのリスクは株式と転換社債の組入れ比率の影響をもっとも大きく受ける。株式と転換社債の相関が0.84と非常に高く，これら資産の収益率については歪度，系列相関などがより深刻であることを考えれば，高い期待リターンを設定したポートフォリオについてモデル間の差が生じるのは自然であり，企業年金資産の運用規制の撤廃後，公的年金の自主運用開始後には，さらに使用するモデルの選択が問題となると考えられる。

次に目標収益率θについては，ポートフォリオの性質に明確な影響は観察されなかった。しかしより広義の下方リスクモデルを考えれば，θは収益率のようなフローの概念ではなく，資産に対する債務，年金運用で言えば責任準備金といったストックの概念でも定義可能であるし，パフォーマンス評価との関連でベンチマーク，あるいは動的なポートフォリオ複製戦略からの収益率を用いて定義することも可能である。このためこれまでの検証のみを根拠として「目標収益率はポートフォリオの性質に大きな影響を与えない」と結論づけることは難しい。

最後に過去4年から7年の四半期データを用いて予測を行った場合に，今回の検証に関しては平均下方部分積率モデルが低リスク高リターンをもたらす傾向が見られた。一方，過去2，3年のデータを用いた場合には逆に平均分散モデルが良好な結果を残し，8年から10年ではモデル間に明確な差が見られないという現象が存在する。この現象はなぜ起こるのであろうか。

もし資産収益率が各期独立で，かつ多変量正規分布に従うとき，投資家は平均分散モデルを用いて最適なポートフォリオを得る。しかし収益率が多変量正規分布に従わないとすれば，より大きな正の歪度を持つポートフォリオを選択可能な平均下方部分積率モデルを用いることは絶対危険回避度減少の効用関数を持つ投資家には好ましい。

一方，資産経済において株式期待収益率は，経済の生産物からの将来の配当およびその変動リスクを投資家が合理的に予測することにより，経済の均衡と整合的に決定される。したがって投資家は自らの資産需要行動を通じて，均衡期待収益率に影響を与えるし，同時に株価変動はビジネスサイクルの影響を直接的に受けると言ってよい。経済企画庁の景気基準日付によれば，今回用いたデータの開始時点である1976年以降では，第8循環から現在の第12循環までが観測されており，こうしたサイクルに株式市場が先行して動くならば，株価収益率には循環的な要素が含まれる。したがって過去のデータをそのまま用いて予測とする場合にも，平均下方部分積率モデルと平均分散モデルの振る舞いは異なるはずであるが，その場合にはどちらか一方のモデルのもとでのポートフォリオが他方に対して支配的となる保証はない。

以上の点から，推定に用いた期間数が投資パフォーマンスに与えた影響が，収益率の非正規性による

ものか，それとも株価の循環によるものかは明らかにされるべきである。ここでは，この問題についての答えを出すことを目的として以下のようなシミュレーションを行った。

Step 1. 安全資産利子率はこの期間のコールレートの平均とほぼ同一の1.5%（四半期）に固定する。他の資産については元データでの超過収益率に1.5%を加えた値とする。推定に用いる期間数mを決定する。試行回数のカウンタ$N=1$とする。

Step 2. [0, 1] 上の一様乱数を70個発生させ，これを昇順に整列することにより，全データ（四半期データで標本数70）の順番を入れ替え，同一データの重複使用を認めない新たな資産収益率の系列を生成する。

Step 3. この仮想的なデータ系列を用いて，政策ポートフォリオの株式組入れを50%，目標収益率$\theta=1.375\%$として，$70-m$期間のバックテストを行い平均下方部分積率モデルと平均分散モデルのパフォーマンスを調べる。

Step 4. $N=100$ならば終了，さもなければ$N=N+1$としてStep 2へ。

以上の作業を$m=8, 20, 40$（すなわち過去2, 5, 10年のデータの使用）について行う。

乱数の発生により新たな資産収益率系列を生成するため，収益率の持つ構造のうち系列相関は破壊されるものの，資産間のクロスセクションでの相関と，非正規性は保存される。したがって実際の資産収益率と同程度の正規分布からの乖離を認めた上で，平均下方部分積率モデルと平均分散モデルの比較を行うことができる(5)。ここで過去2, 5, 10年は，それぞれ前節の結果において，平均分散モデルが支持される場合，平均下方部分積率モデルが支持される場合，無差別となる場合を代表する。過去2, 5, 10年について，前節での観察が再現されるならば，収益率分布の非正規性によりポートフォリオ収益率に差が生じているとの推測がなされるし，もし状況が変化すれば，系列相関の問題を考慮した分析が必要とされる。

図3，4，5はそれぞれ過去2年，5年，10年のデータを用いた場合のシミュレーションの結果である。各図の横軸は平均下方部分積率モデルでの実現収益率に関する2次LPMの平方根（Target S.D.）から，平均分散モデルのもとでの2次LPMの平方根を差し引いて求めたリスクの差である。また縦軸は平均下方部分積率と平均分散モデルの実現収益率の差である。各点が100回のシミュレーションの結果を表している。

図3～5において，モデル間のリスク量の差を表す横軸，実現収益率のスプレッドを表す縦軸の範囲は固定されているので，三つの図を比較することにより，データの使用期間が長くなるほど，モデル間のパフォーマンスの差が縮小していることがわかる。この点については前節での結果と共通である。逆に前節での結果との相違点は，観測の乱数による並べ替えを行わない場合には，より短期（$m=8\sim12$）のデータを使用した時には平均分散モデル，中期（$m=16\sim32$）のデータを用いると平均下方部分積率モデルが他方に対して支配的となる傾向が見られたが，このような傾向が順序を入れ替えた場合には見られないことである。

(5) ただし系列が各回毎に異なり，最初のm回は予測としてしか用いられないため，100回の異なる試行での実現収益率を比較することはできない。またバックテストの検証期間が$70-m$回と異なるので，異なるmを用いた場合の結果を相互比較することもできない。

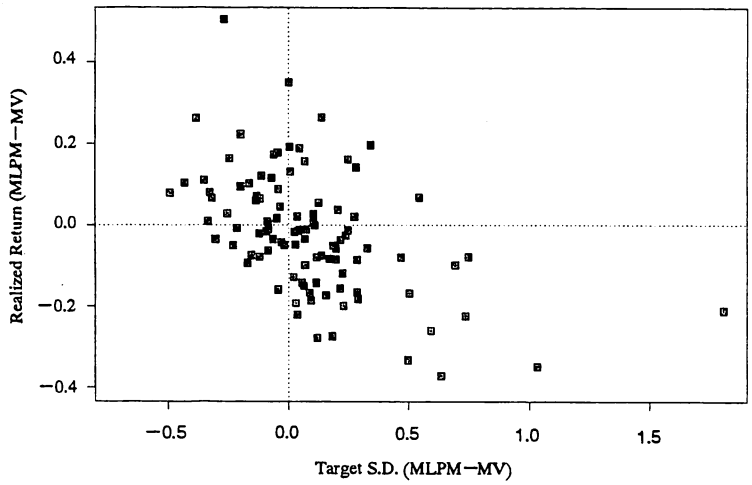

図3　シミュレーション結果：過去2年のデータの使用

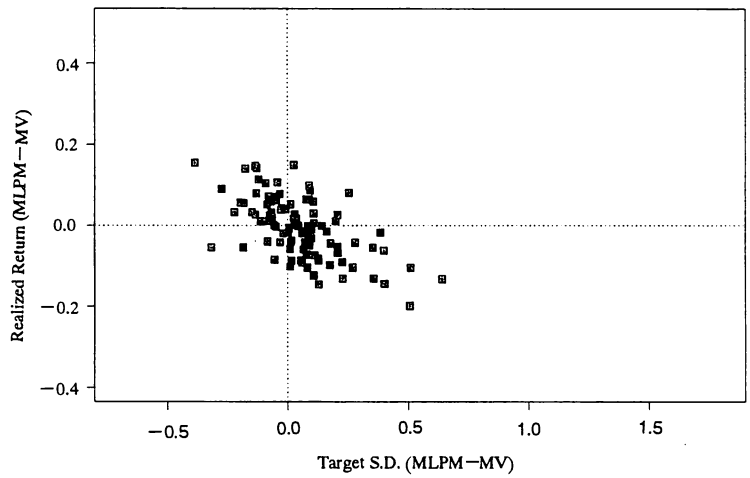

図4　シミュレーション結果：過去5年のデータの使用

表7は図3～5において，平均下方部分積率モデルのもとでのポートフォリオと平均分散モデルのもとでのポートフォリオの支配関係を調べたものである。この表が示すように，使用するデータ数に関係なく，おおよその傾向が安定的であることがわかる。また100回の試行において，平均分散モデルからの実現収益率が支配的なケース（b）は，平均下方部分積率モデルからの実現収益率が支配的なケース（a）を上回っている。この結果からすれば，過去のデータのもとでの高次モーメントの考慮は，事後収益率には反映されないことになり，我々の直感に反するものである。そこでシミュレーションにおいて構築されたポートフォリオを調べてみると，この現象がデータの使用において重複を認めていないことに起因するものであると推測された。

もしポートフォリオ構築時に極端な株式市場の暴落がシナリオに含まれると，その観測からの下方部分積率を減少させようと，最適化の結果として債券等にシフトしたポートフォリオが構築される。しか

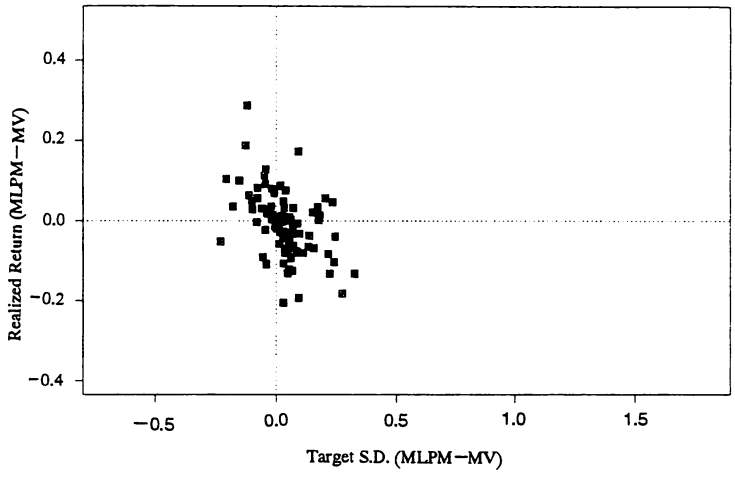

図5　シミュレーション結果：過去10年のデータの使用

表7　データの順序を入れ替えた場合のポートフォリオ間の優劣

	過去2年	過去5年	過去10年
(a) MLPMがMVに対して低リスク高リターン	26	29	26
(b) MLPMがMVに対して高リスク低リターン	45	46	48
(c) MLPMがMVに対して低リスク低リターン	14	7	7
(d) MLPMがMVに対して高リスク高リターン	15	18	19

しデータの重複使用を認めないために同一の観測による株式暴落がその後においては起こることはないため，これは平均分散モデルと比較して不必要にリスクを回避することになる。逆にポートフォリオ構築時に株式暴落のデータが含まれない時には，株式にシフトしたポートフォリオが構築され，それがその後に発生する株式暴落において一時的に大きな損失を与えるのである。この解釈が正しければ，それは前節での過去2年のデータを使用した場合に平均分散モデルが優位に，過去5年のデータを使用した場合には平均下方部分積率モデルが優位になったこととも矛盾しないものである。

それではデータの重複使用を認めて，過去に起きた市場が同様に将来においても繰り返し再現されるとすれば，シミュレーション結果はどのように変化するのであろうか。ここで新たに以下のような検証を行うことにする。

Step 1. 安全資産利子率は観測期間のコールレートの平均とほぼ同一の1.5%（四半期）に固定する。他の資産については元データでの超過収益率に1.5%を加えた値とする。使用データ数は$m=20$として5年に固定。回数カウンタ$N=1$。

Step 2. 乱数によりもともとの70四半期の収益率データから重複を認め，15年間（観測数60）のデータを生成する。

Step 3. 期待収益率，目標収益率，制約条件等はこれまでと同一として，最初の5年間の観測を初回のポートフォリオ構築に使用して，その後の10年間についてバックテストを行う。

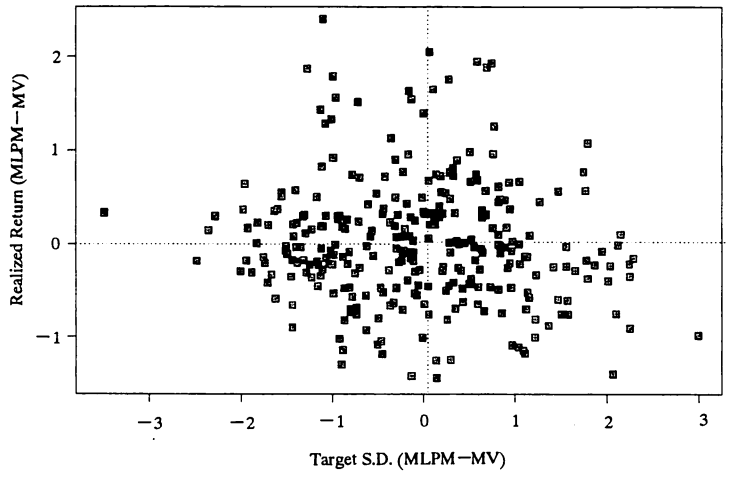

図6　シミュレーション結果：過去5年のデータの使用

Step 4.　$N=300$ ならば終了，さもなければ $N=N+1$ として Step 2へ。

図6は上述の300回のバックテストの結果から得たリスク-リターン特性を，図3～5と同様に示したものである。この図からデータの重複を認めるときには，平均下方部分積率モデルからのポートフォリオが平均分散モデルからのポートフォリオに対して支配的となる場合がこれまでと比べて大幅に増加していることが明らかである。300回の試行において，実現収益率において平均下方部分積率モデルが平均分散モデルに対して下方部分積率の意味で低リスク，高リターンとなるのは36%，逆に平均分散モデルが低リスク，高リターンとなるのは28%である（残りの36%についてはリスク態度が定まらない限りその優劣を決めることはできない。）。

以上の分析を総合すると，本節の検証から以下の2点が新たな知見として得られたと言える。

- 収益率確率分布の推定に使用するデータ数が増加するときに，平均下方部分積率モデルと平均分散モデルは，より類似のポートフォリオを選択し，事後的なパフォーマンスには差が生じにくくなる。
- 将来の確率分布を正しく予測できない場合には，平均下方部分積率モデルが平均分散モデルと比較して，投資家にとって好ましい結果をもたらすとは限らない。しかし過去の記録された収益率が，将来においても再現される状況に限定すれば，平均下方部分積率モデルを使用して事後的に低リスク高リターンのポートフォリオを構築することがある程度可能である。

これまでの本研究での検証は運用に関して現実的と考えられる程度に制約を与えた状況で行われ，かつ使用されたデータも実際の日本の機関投資家がアセットアロケーションにおいて一般的に使用してきたものである。歪度，尖度などの高次モーメントを人為的に制御したり，投資対象として派生証券を導入することにより，平均下方部分積率モデルに有利な状況を作り出しているわけではないし，実務上の資金性格を無視して実現不可能なポートフォリオを構築しているわけでもない。しかしそのような状況でも，平均下方部分積率モデルの持つ可能性が部分的には明らかにされたと言える。

6 結論及び将来の課題

本研究では，多くの条件の組合せのもとでの平均下方部分積率モデルの有効性の検証は不可能であるという認識から出発して，実現可能な検証の部分集合においても，平均分散モデルのもたらすパフォーマンスとの間に差が生じることを確認することにあった。この点については今回行ったいくつかの分析により，平均下方部分積率モデルの持つ理論的優位が，アセットアロケーション策定に適用された場合に有効かは，期待収益率，目標収益率などのパラメータの設定と，収益率の予測方法に依存していることが明らかにされた。

今回の分析において得られたもっとも興味深い知見は，予測に使用するデータ数とモデル間のパフォーマンスに関してのものである。実務家は一般的に過去5年の収益率により将来の予測を代替する。この条件下のバックテストからの実現収益率の傾向を分析した場合，より危険許容的な投資家について，平均下方部分積率モデルが平均分散モデルと比較して低リスク高リターンとなる場合が存在した。しかしこの傾向は一般的ではなく，2～3年の短期のデータを予測に使用した場合には平均分散モデルが低リスク高リターン，逆に4～7年程度では平均下方部分積率モデルが優位，8～10年ではモデル間のパフォーマンスが縮小することが明らかになった。

次に乱数によりデータの順序を入れ替えてのシミュレーションの結果から，バックテストの結果と同様に，推定に用いたデータ数の増加とともにモデル間のパフォーマンス差が縮小することが示された。しかしながら一方でポートフォリオ実現収益率のリスク-リターン特性は，通常のバックテストと系列相関を破壊したシミュレーションで，その傾向が大きく異なることも確認された。この観察事実は，下方リスクモデルの有効性の，より詳細な検証には，資産収益率の分布に関する仮定と，実際に市場において記録された収益率データから投資家がその真の確率分布についてどれだけの情報を得ることができるかについて検討を行った上で分析すべきであるという研究の方向性を示している。もし本研究の結果が示唆するように，資産収益率の系列相関が問題になるとすれば，1期間モデルによるポートフォリオ構築の是非，同時に多期間資産選択モデルの可能性についても議論がなされるべきであろう。

今後，資産収益率の予測に関しては，アセットプライシングの視点からビジネスサイクルと株価変動を関連づけることが必要であると考えられる。特に下方リスクモデルを用いてアセットアロケーションの策定を行う際には，資産収益率に含まれる循環的要素をシナリオ作成において適切に取り込むことが必要とされる。

最後に本研究ではペナルティーの次数k，制約条件，資産クラス設定といった諸条件は固定されており，それらが最適ポートフォリオに与える影響については検証を行っていない。また最小許容収益率θについても事前に与えられた定数としているが，これをベンチマークに対応してベクトル化するなどの一般化を行った場合についても同様に分析は行われていない。この点からすれば，下方リスクモデルの実務上の有効性は，パラメータの設定方法やモデル拡張の可能性も含めて今後も継続的に研究がなされるべきであると言えるだろう。

■参考文献

[1] A. B. Abel (1988), "Stock returns under time-varying dividend risk: An exact solution in an infinite-horizon general equilibrium model," *Journal of Monetary Economics* 22, pp.375–93.

[2] K. J. Arrow (1971), "Theory of risk aversion," in *Essays in the Theory of Risk Bearing*, Chapter 3, Markham, Chicago.

[3] V. S. Bawa (1975), "Optimal rules for ordering uncertain prospects," *Journal of Financial Economics* **2**, pp.95–121.

[4] V. S. Bawa, E. B. Lindenberg (1977), "Capital market equilibrium in a mean lower partial moment framework," *Journal of Financial Economics* **5**, pp.189–200.

[5] R. G. Clarke (1987), "Stochastic dominance properties of option strategies," in *Advances in Futures and Options Research*, **2** JAI Press Inc.

[6] R. G. Clarke (1990), "Stochastic dominance of portfolio insurance strategies," *mimeo.*, TSA Capital Management Co.

[7] E. F. Fama and K. R. French (1988), "Permanent and temporary component of stock prices," *Journal of Political Economy* **96**, pp.246–273.

[8] P. C. Fishburn (1977), "Mean-risk analysis with risk associated with below-target returns," *American Economic Review* **67**, pp.116–126.

[9] R. R. Grauer and N. H. Hakansson (1982), "Higher return, low risk: Historical returns on long-run, actively managed portfolios of stocks, bonds and bills: 1936–1978," *Financial Analysts Journal*, pp.139–53.

[10] R. R. Grauer and N. H. Hakansson (1987), "Gains from international diversification: 1968–85 returns on portfolios of stocks and bonds," *Journal of Finance* **42**, pp.721–739.

[11] G. Hanoch and H. Levy (1969), "The efficiency analysis of choices involving risk," *Review of Economic Studies* **36**, pp.335–46.

[12] W. V. Harlow, K. S. Rao (1989), "Asset pricing in a generalized mean lower partial moment framework: Theory and evidence," *Journal of Financial and Quantitative Analysis* **24**, pp.285–312.

[13] W. V. Harlow (1991), "Asset allocation in a downside-risk framework," *Financial Analyst Journal,* pp.28–40.

[14] Hodrick, R. J. and E. C. Prescott (1997), "Post-war business cycles: An empirical investigation," *Journal of Money Credit and Banking* **29**, pp.1–16.

[15] Leibowitz M. L. and R. D. Henriksson (1989), "Portfolio Optimization with Shortfall Constraints: A Confidence Limit Approach to Managing Downside Risk," *Financial Analysts Journal*, pp.34–41.

[16] H. Levy and Y. Kroll (1978), "Ordering uncertain options with borrowing and lending," *Journal of Finance* **33**, pp.553–73.

[17] H. Levy and Y. Kroll (1979), "Efficiency analysis with borrowing and lending," *The Review of Economics and Statistics*, pp.125–30.

[18] A. W. Lo and A. C. MacKinlay (1988), "Stock prices do not follow random walks," *Review of Financial Studies* **1**, pp.41–66.

[19] H. M. Markowitz (1959), *Portfolio selection, Efficient Diversification of investments*, John Wiley and Sons, New York.

[20] J. M. Poterba and L. S. Summers (1988), "Mean reversion in stock prices: Evidence and implications," *Journal of Financial Economics* **22**, pp.27–59.

[21] J. W. Pratt (1964), "Risk aversion in the small and in the large," *Econometrica* **32**, pp.122–136.

[22] W. Sharpe and L. Tint (1990), "Liabilities—A new approach," *The Journal of Portfolio Management*, pp.5–10.

[23] 竹原　均（1994）「下方リスクモデルの概要と実用上の諸問題」証券アナリストジャーナル **32** No. 2, pp.1–12.