ID	JJF00180

論文名	数理Finance論の離散時間モデルにおける無限期間状態価格アプローチの設定と分析
	Model setting and analysis of discrete time state price approach on infinite horizon case
著者名	赤壁弘康
	Hiroyasu Akakabe
ページ	51-82

名称	日本経営財務研究学会編『経営財務情報の経済分析』中央経済社
発行巻号	経営財務研究双書 19
	Vol. 19
発行年月	1999年10月
	Oct. 1999
発行者	日本経営財務研究学会
	Japan Finance Association
ISBN	4-502-35193-8 C3334

第3章　数理 Finance 論の離散時間モデルにおける無限期間状態価格アプローチの設定と分析

（有界適合過程，Lebesgue の優越収束定理および Blackwell の不動点定理による Markov 制御の応用）

赤壁　弘康

要　　旨：本稿の目的は，無限期間の設定の下で，一期間の状態価格アプローチに対応する結果を導くことにある。まず，市場参加者の最適化問題を Markov ダイナミック・プログラミングとして定式化することから議論を始め，Markov 均衡を明らかにする。しかる後に，Markov 性を仮定せずに証券価格の無裁定あるいは最適性の含意を考察する。

キーワード：有界適合過程，Blackwell の不動点定理，Markov 均衡，証券市場均衡，Riesz の表現定理

はじめに

一期間の状態価格アプローチでは，裁定・最適性・均衡などの Finance 論の中心的な概念が厳密に定義され，あるいは分析され得ることが示されている (Duffie ［16,17,18,19］)。一期間の状態価格アプローチは，有限集合で表される状態が $j \in \{1,\ldots,S\}$ であるときに証券 $i\ (i=1,\ldots,N)$ によって支払われる配当 D_{ij} を要素とする $N \times S$ 配当行列 D によって特徴づけられる。一期間の状態価格アプローチを多期間に拡張するには，ペイオフ $D^{\top}\theta$ を確率過程（配当過程）に拡張することを別にすれば，さほど困難はない（実際には，以下の定義 2.1 で定義される状態価格関数 $\mathfrak{S}$ によって対応づけられる)。むしろ，有限期間か

1998 年 2 月 17 日受理

無限期間かで，モデルに課される制約が異なる。無限期間を取扱うためには，有限期間よりも厳しい制約が課され，しかも有限期間の場合には現れない数学的な技術が必要となる。それゆえ，無限期間で得られる結果は，それと同等ないしはより緩い制約条件の下で，有限期間においても得られる。

したがって，本稿の目的は，無限期間の設定の下で，一期間の状態価格アプローチ（たとえばDuffie［19, Chp.1］）に対応する結果を導くことにある。

離散時間無限期間の設定に関しては，離散時間多期間モデルを用いて資産の評価を取り扱ったSamuelson［30］, Levhari-Srinivasan［26］, Lucas［27］らの先駆的業績と大いに関連する。特に，Markovダイナミック・プログラミングを用いて定式化したLucas [27] は無限期間設定の理論的な骨格をほとんど完成したといってよいであろう。無限期間状態価格アプローチに関する最近の業績ではDuffie［16,18,19］が体系的かつ詳細である。しかし，Duffie［16］は Borel 空間を前提にしており，数学プロパーでない Finance 研究者にとっては初等的なアプローチとはいい難い。また，Duffie［18,19］は関数空間を工夫することによって前者に比べれば数学的には初等的アプローチになっており大いに参考になるが，議論を厳密に展開するために不可欠な証明がまったく付されていないため (1)，自己充足的とは言い難い。そこで本稿は，概ね Duffie［19,Chp.4］の分析の流れをフォローしながら Markov ダイナミック・プログラミングに馴染みのない Finance 研究者のために，可能な限り自己充足的に証明を施すことにする。

まず，状態価格関数$\mathfrak{S}$を固定して市場参加者の効用最大化問題を Markov ダイナミック・プログラミングとして定式化することから議論を始め（第 2, 3 節），この後に, Markov 性を仮定せずに証券価格の無裁定あるいは最適性の含意を考察する（第 4, 5 節)。第 2 節では，この時間斉次 Markov ダイナミック・プログラミングの値関数がBlackwellの不動点定理2.1で示唆される一意な不動点として与えられることを示す。第 3 節では，状態価格関数$\mathfrak{S}$によって Markov 単一参加者均衡を特徴づける。$\mathfrak{S}$が Markov 単一参加者均衡であるための必要十分条件は，$\mathfrak{S}$が確率 Euler 方程式（12）を満足することであることが示される。第 4 節では，有界適応過程の空間Lを前提としてT期裁定が存在しないとき，

状態価格版配当割引モデルが導出される。しかし無限期間設定（$T \to \infty$）のとき，配当割引モデルと資産価格のバブルの理論の関係と同様，状態価格デフレータ $\pi \in L$ の存在性・一意性は保証されなくなる。そこで L にあるノルムを備えた $L^* \subset L$ を状態価格デフレータの候補の空間に選ぶことによって，第5節で Markov 性を仮定しない最適性が主張される。そこでは Markov 設定に依存することなく，確率 Euler 方程式（12）が均衡の必要条件であることが示される。次に，S が単一参加者経済の均衡であるための必要十分条件は，市場参加者の効用関数の方向微分 $\nabla U(e)$ に対する Riesz 表現 $\pi \in L^*$ が状態価格デフレータとなることによって与えられることを主張する。

1．証券市場――モデルの一般的な前提――

無限期間問題を取り扱うためには，確率変数の収束と極限操作が不可欠になる。まず，これを明らかにしておこう。

確率空間 $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ を固定すれば，すべての $\varepsilon > 0$ に対して $\mathbf{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \to 0$ であるとき，確率変数列 $\{X_n\}$ は X に確率収束するといわれる。事象 B のすべての ω に対して $X_n(\omega) \to X(\omega)$ となるような確率1の B が存在するとき（言い換えれば，確率1で $X_n(\omega) \to X(\omega)$ となれば），確率変数列 $\{X_n\}$ は X に概収束するといわれる。このとき，Lebesgue の優越収束定理の名で知られている以下の定理が成り立つ(2)。

定理 1.1（Lebesgue の優越収束定理）$\{X_n\}$ はすべての n に対して $|X_n| \leq Y$ である確率空間上の確率変数列とし，Y は $\mathbf{E}(Y) < \infty$ である確率変数とする。X_n は X に概収束するとする。このとき $\mathbf{E}(X_n) \to \mathbf{E}(X)$。

証明の詳細については例えば Liptser-Shiryayev [25, Thm.1.4], Shiryayev [31, Chp.II, Sec.6, Thm.3] を参照されたい（Liptser-Shiryayev [25, p.16, Note 1] は，概収束列 $\{X_n\}$ を確率収束列としても定理が成り立つことを示している）。この定理は，収束確率変数列に関しては，期待値演算と極限操作は交換可能であることを保証している。

Lによって，X_tが$|X_t|\le k$を満足する$\mathfrak{F}_t$可測な確率変数となるような定数kが存在するものとして，$X=\{X_0,X_1,X_2,\ldots\}$の形の確率変数列の空間を表すものとする。言い換えれば，**Lは有界適合過程の空間**である。Lが有界適合過程の空間であるから，Lに属するすべての確率変数列に関して，Lebesgueの優越収束定理1.1を適用することができる。

N種の証券が存在するものとする。ここで，証券nはLに属する配当過程δ^nに対する請求権として定義され，Lに属する（配当支払後）価格過程S^nを有するものとする。ただし，δ_t^nは時刻tに証券nによって支払われる配当額を表す(3)。取引戦略はある$\theta=(\theta^1,\ldots,\theta^N)\in\Theta\equiv L^N$である。ここで，$\theta_t=(\theta_t^1,\ldots,\theta_t^N)$は，取引の後時刻$t$に保有されるポートフォリオを表す。$\Theta$に属する各々の$\theta$は

$$\delta_t^\theta=\theta_{t-1}\cdot(S_t+\delta_t)-\theta_t\cdot S_t,\quad t\ge 0$$

によって定義される配当過程δ^θを生成する。ここで慣習によって$\theta_{-1}=0$と仮定される。はじめに無限期間設定における**裁定**を定義しておく(4)。

定義 1.1　無限期間における**裁定**とは，$\delta^\theta>0$であるような取引戦略θを意味する。$T<\infty$に対してT**期裁定**とは，$\theta_t=0, t\ge T$であるような任意の取引戦略θを意味する。

裁定が存在しないならば，明らかに，任意のTに対してT期裁定が存在しない。状態価格デフレータは次のように定義される。

定義 1.2　$\theta_t=0, t\ge T$であるような任意の取引戦略θに対して$\mathbf{E}(\sum_{t=0}^T\pi_t^T\delta_t^\theta)=0$，かつ，$\pi_0^T=1$である狭義に正の過程$\pi^T\in L$を$T$期状態価格デフレータという。

市場参加者はLの非負過程の集合L_+から消費過程を選択するものとする。消費過程は実行可能予算集合$\Theta(e)$から取られるものとする。

定義 1.3　消費過程を資金調達するに足る実行可能予算集合$\Theta(e)$は，$\Theta(e)=\{\theta\in\Theta\colon\ e+\delta^\theta\ge 0\}$で定義される。

所与の市場参加者は，L_+に属する賦存額過程eと(5)状態$i\in Z$を所与とし

て，効用関数$U^i: L_+ \to \mathbb{R}$を有するものとする。この参加者の問題は

$$\sup_{\theta \in \Theta(e)} U^i(e + \delta^\theta)$$

である。この問題は，経済学の観点から見れば，実行可能予算集合$\Theta(e)$から効用を最大化するように消費過程（したがってポートフォリオθ）を選択する市場参加者の効用最大化問題を表している。

2　市場参加者の最適化問題の Markov ダイナミック・プログラミングとしての解

本節では，上述の市場参加者の効用最大化問題を解くための第1段階として，U^i, e, δ^θが時間斉次性を満たすという前提の下で，時間斉次 Markov 制御問題（Markov ダイナミック・プログラミング）の値関数を求めるという特殊化された問題を考える。分析のステップは，時間斉次 Markov ダイナミック・プログラミングの値関数が Blackwell の不動点定理2.1で示唆される一意な不動点として与えられることを示すことにある。

$X = \{X_1, X_2, \ldots\}$は，有限集合Zで値をとる時間に関して斉次な(6) Markov 連鎖であるとする(7)。$\mathfrak{F}_t$によって$\{X_0, \ldots, X_t\}$から生成される必ずしも有限ではない状態集合Ωの族を表わすことにする。Markov 連鎖Xが有限集合Zで値をとることから，各々のtに関して$\mathfrak{F}_t$には単に有限個の事象しか含まれないということになる。

時間斉次 Markov モデルを展開するため，はじめに効用関数，賦存額，証券配当が特殊な時間斉次性を満足するものとする。iを所与として，効用関数$U^i: L_+ \to \mathbb{R}$が割引率$\rho \in (0,1)$と，狭義に増加・有界・凹かつ連続な関数$u: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$によって

$$U^i(c) = \mathbf{E}^i\left[\sum_{t=0}^{\infty}\rho^t u(c_t)\right] \tag{1}$$

のように定義されるものとする。ここで$\mathbf{E}^i$は$X_0 = i$に関する確率測度$\mathbf{P}_i$の下でとった期待値を表す。関数$g: Z \to \mathbb{R}_{++}$および$f: Z \to \mathbb{R}^N_{++}$によって，すべての$t$に対して賦存額が$e_t = g(X_t)$で，配当ベクトルが$\delta_t = f(X_t)$で与えられるものとする。

最後に，証券価格は，すべてのtに関して$S_t = \mathfrak{S}(X_t)$となるようなある固定された関数$\mathfrak{S}: Z \to \mathbb{R}^N_{++}$によって与えられるものとする。本来，状態価格は各々の状態 iと配当過程δ^θを対応づけるものであるべきである。しかし各証券の配当δ^nは仮定によって$\mathbb{R}^n$値証券価格過程Sに体化されているので，この関数$\mathfrak{S}$はある状態$i \in Z$と証券価格S_tを対応づけるものであるから，状態価格アプローチの本質的な部分とみなしてよい。

定義 2.1　すべてのtに関して証券価格が$S_t = \mathfrak{S}(X_t)$となるようなある関数$\mathfrak{S}: Z \to \mathbb{R}^N_{++}$によって与えられるとき，$\mathfrak{S}$を**状態価格関数**という。

次節において，この状態価格関数$\mathfrak{S}$が Markov 均衡を特徴づけることが明らかにされる。

ここで，$\mathbb{R}^N_{++}$に属するポートフォリオbを固定し，$-b$を空売りポジションの下限とする。この制約は後で取り除かれるが，現在のところは，富は

$$\underline{w} = \min_{i \in Z} -b \cdot [\mathfrak{S}(i) + f(i)]$$

によって下から有界であるとする。

定義 2.2　$D = Z \times [\underline{w}, \infty)$とする。$Z$に属する各々の$i$に対して$F(i,\cdot): [\underline{w}, \infty) \to \mathbb{R}$が有界・連続な凹関数であれば，関数$F: D \to \mathbb{R}$は$B(D)$で表される関数空間に属するものと定義する。

上述の市場参加者の効用最大化問題は，参加者の Markov 制御問題の**値**としてある $V \in B(D)$を求める問題に特殊化される。すなわち

$$V(i,w) = \sup_{(c,\theta)\in L_+\times\Theta} U^i(c) \tag{2}$$

が制約

$$W_0^\theta = w \tag{3}$$

$$W_t^\theta = \theta_{t-1}\cdot[\mathfrak{S}(X_t)+f(X_t)], \quad t\geq 1 \tag{4}$$

$$c_t + \theta_t\cdot\mathfrak{S}(X_t) \leq W_t^\theta + g(X_t), \quad t\geq 0 \tag{5}$$

$$\theta_t \geq -b, \quad t\geq 0 \tag{6}$$

の下で成り立つような $V\in B(D)$ を求めなければならない。

$B(D)$ に属するある任意の F をとることによって値関数 V を解き，この解の候補から以下で述べるような $\mathfrak{U}F$ で表される新しい候補を構成することにする。$F=\mathfrak{U}F$ ならば $F=V$ となることを示すことがここの手法である。$B(D)$ に属する任意の F に対して，$\mathfrak{U}F\colon D\to\mathbb{R}$ を

$$\mathfrak{U}F(i,w) = \sup_{(\bar{\theta},\bar{c})\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}_+}\left[u(\bar{c})+\rho\mathbf{E}^i\left[F\left(X_2,\bar{\theta}\cdot[\mathfrak{S}(X_2)+f(X_2)]\right)\right]\right] \tag{7}$$

が制約

$$\bar{c}+\bar{\theta}\cdot\mathfrak{S}(i)\leq w+g(i) \tag{8}$$

$$\bar{\theta}\geq -b \tag{9}$$

の下で成り立つようなものとして定義する。言い換えれば，$\mathfrak{U}F(i,w)$ は，次期の値関数が F であるとして，(i,w) であるときに達成し得る上限効用を表している [(8)]。

補題 2.1　F **が** $B(D)$ **に属するならば，** $\mathfrak{U}F$ **も** $B(D)$ **に属する。**

証明　$\mathfrak{U}F\in B(D)$ を主張するには，$\mathfrak{U}F(i,w)$, $w\in[\underline{w},\infty)$ が各々の $i\in Z$ に対して有界，凹，連続であることを示す必要がある。$\mathfrak{U}F$ の凹性が証明されれば，連続性は証明し得る [(9)]。

（凹性）$(i,w_1),(i,w_2),w_1,w_2\in[\underline{w},\infty)$ のときの解をそれぞれ

$$(c_1,\theta_1)=(C(i,w_1),\Phi(i,w_1)),\quad (c_2,\theta_2)=(C(i,w_2),\Phi(i,w_2))$$

とする。したがって

$$\mathfrak{U}F(i,w_1)=u(c_1)+\rho\mathbf{E}^i\big[F\big(X_2,\theta_1\cdot[\mathfrak{S}(X_2)+f(X_2)]\big)\big],$$
$$\mathfrak{U}F(i,w_2)=u(c_2)+\rho\mathbf{E}^i\big[F\big(X_2,\theta_2\cdot[\mathfrak{S}(X_2)+f(X_2)]\big)\big].$$

ところで最適性の原理より（$\min[w_1,w_2]\le\lambda w_1+(1-\lambda)w_2\le\max[w_1,w_2]$）

$$\begin{aligned}\mathfrak{U}F(i,\lambda w_1+(1-\lambda)w_2)&\ge u(\lambda c_1+(1-\lambda)c_2)\\&\quad+\rho\mathbf{E}^i\big[F\big(X_2,(\lambda\theta_1+(1-\lambda)\theta_2)\cdot[\mathfrak{S}(X_2)+f(X_2)]\big)\big]\\&\ge\lambda u(c_1)+(1-\lambda)u(c_2)\\&\quad+\lambda\rho\mathbf{E}^i\big[F\big(X_2,\theta_1\cdot[\mathfrak{S}(X_2)+f(X_2)]\big)\big]\\&\quad+(1-\lambda)\rho\mathbf{E}^i\big[F\big(X_2,\theta_2\cdot[\mathfrak{S}(X_2)+f(X_2)]\big)\big]\\&=\lambda\mathfrak{U}F(i,w_1)+(1-\lambda)\mathfrak{U}F(i,w_2).\end{aligned}$$

（有界性） $F\in B(D)$ であるから有界，すなわち

$$\text{for each } i\in Z\quad |F(i,w)|\le M,\quad \exists M\le\infty,\ \text{for } \forall w\in[\underline{w},\infty)$$

であるから，$\mathbf{E}^i[F(X_2,\bar{\theta}\cdot[\mathfrak{S}(X_2)+f(X_2)])]\le M$。$u$ は有界，すなわち $|u(x)|\le K,\exists K<\infty, x\in\mathbb{R}_+$。したがって $|\mathfrak{U}F(i,w)|\le\rho(K+M)$。
（連続性） $\mathfrak{U}F(i,\cdot)$ が有界な凹関数であることから，$[\underline{w},\infty)$ の内部で連続であることは，Jensen の不等式を応用することによって証明することができる (10)。

□

$B(D)$ に属する任意の F,G に対して，任意の2関数間の「距離」の概念を用いて

$$d(F,G)=\sup\{|F(i,w)-G(i,w)|:\ (i,w)\in D\}$$

とする。$d(\cdot,\cdot)$ は以下の距離の公理を満足する。

1．$d(F,G)=0$ であるとき，かつそのときに限り $F=G$ である。

2．$d(F,G)=d(G,F)$，（対称性の公理）

3．$d(F+H)+d(H+G)\ge d(F,G)$，（三角形の公理）

関数解析のテキスト（たとえば Kolmogolov-Fomin［24, Chp.2］等）によれば，

距離の公理を満足する $d(\cdot,\cdot)$ は完備距離空間を生成することが知られている。

補題 2.2　$B(D)$ **に属する任意の** F **および** G **に対して，**

$$d(\mathfrak{U}F,\mathfrak{U}G)\le\rho d(F,G).$$

証明　$m=d(F,G)=\sup\{|F(i,w)-G(i,w)|:(i,w)\in D\}$ とする。このとき

$$F(i,w)\le G(i,w)+m\quad\text{for }(i,w)\in D.$$

したがって

$$\begin{aligned}\mathfrak{U}F(i,w)&=\sup_{(\bar\theta,\bar c)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}_+}\left[u(\bar c)+\rho\mathbf{E}^i\left[F\left(X_2,\bar\theta\cdot[\mathfrak{S}(X_2)+f(X_2)]\right)\right]\right]\\&\le\sup_{(\bar\theta,\bar c)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}_+}\left[u(\bar c)+\rho\mathbf{E}^i\left[G\left(X_2,\bar\theta\cdot[\mathfrak{S}(X_2)+f(X_2)]\right)+m\right]\right]\\&=\mathfrak{U}G(i,w)+\rho m.\end{aligned}$$

同様に

$$G(i,w)\le F(i,w)+m\quad\text{for }(i,w)\in D.$$

したがって，$\mathfrak{U}G\le\mathfrak{U}F+\rho m$。かくして

$$d(\mathfrak{U}F,\mathfrak{U}G)\le\rho m=\rho d(F,G).$$

よって与えられた主張は証明された。　□

この補題を用いれば，**Blackwell の不動点定理**[11] の名で知られているいわゆる**縮小写像の原理**によって，方程式 $\mathfrak{U}F=F$ に対する一意解 F を構成することができる。

定義 2.3　$F=\mathfrak{U}F$ を満たす一意解 F を，作用素 $\mathfrak{U}$ の**不動点**という。

以下の結果から示されるように，計画期間が無限大に近づくとき，有限計画期間問題の値関数の極限として構成されることがわかる[12]。

定理 2.1　**（Blackwell の不動点定理）** D **に属するすべての** (i,w) **に対して** $F_{-1}(i,w)=0$ **であり**

$$F_t=\mathfrak{U}F_{t-1},\quad t\ge0$$

とする。このとき， D **に属するすべての** (i,w) **に関して** $F(i,w)\equiv\lim_{t\to\infty}F_t(i,w)$ **が存在し，** $F=\mathfrak{U}F$ **を満たす** $B(D)$ **に属する一意関**

数を定義する。

証明 （一意性） $\phi, \psi \in B(D)$ がともに作用素 $\mathfrak{U}$ の不動点である，すなわち

$$\phi = \mathfrak{U}\phi, \quad \psi = \mathfrak{U}\psi$$

とする。したがって補題2.1から

$$d(\phi, \psi) = d(\mathfrak{U}\phi, \mathfrak{U}\psi) \leq \rho d(\phi, \psi).$$ ゆえに $0 \leq (1-\rho)d(\phi, \psi) \leq 0.$

$1 - \rho > 0$ から $d(\phi, \psi) = 0$。距離の公理からこれは $\phi = \psi$ を意味する。

（存在性） $F_t = \mathfrak{U}F_{t-1}$ であるから，関数列 $\{F_t\}_{t=0}^{\infty}$ は確かに定義される。不等式

$$d(F_{t+1}, F_t) = d(\mathfrak{U}F_t, \mathfrak{U}F_{t-1}) \leq \rho d(F_t, F_{t-1})$$

を逐次繰り返し用いることによって

$$d(F_{t+1}, F_t) \leq \rho^{t+1} d(F_0, F_{-1})$$

を得る。したがって $0 < \rho < 1$ と $F_{-1} = 0$ より

$$\sum_{t=0}^{\infty} d(F_t, F_{t-1}) < +\infty.$$

$X_t = F_t - F_{t-1}$ とおけば，$\|X_t\| = \sup|F_t - F_{t-1}| = d(F_t, F_{t-1})$ であるから，上は $\sum_{t=0}^{\infty}\|X_t\| < +\infty$ となり級数 $\sum_{t=0}^{\infty} X_t$ が絶対収束することを示している。したがって，$\lim_{n\to\infty} F_n = F^*$ は存在する。$n \to \infty$ とすれば $F^* = \mathfrak{U}F^*$ を得る。□

以上の証明は，$d(\cdot,\cdot)$ が完備距離空間を生成するということを利用しており，その意味で，「縮小写像」の存在と一意性に関するものと同等である。縮小写像に関しては，関数解析のテキストを参照されたい。

$C: D \to \mathbb{R}_+$, $\Phi: D \to \mathbb{R}^N$ は $[C(i,w), \Phi(i,w)]$ が (7)-(9) の解であるとすることによって定義される関数とする。(2)-(6) の初期状態 (i,w) を所与として，W^* を $W_0^* = w$ かつ $W_t^* = \Phi(W_{t-1}^*, X_{t-1})[S(X_t) + f(X_t)]$, $t \geq 1$ によって定義されるものとする。さらに，(c^*, θ^*) を $c_t^* = C(W_t^*, X_t)$ かつ $\theta_t^* = \Phi(W_t^*, X_t)$, $t \geq 0$ によって定義されるものとする。

定義 2.4　(c^*,θ^*)**を最適フィードバック政策という。**

定理 2.2　(Duffie [19, Chp.4, Sec. A, Thm.])　(2)-(6) の値関数Vは$\mathfrak{U}$の一意な不動点である。最適フィードバック政策(c^*,θ^*)は (2)-(6) の解である。

証明　Fを Bellman 方程式の一意解とする。Zに属する任意の初期状態iと$[\underline{w},\infty)$に属する初期資産wを固定する。任意の時刻tにおいて，Bellman 方程式から

$$F(X_t, W_t^\theta) \geq u(c_t) + \rho\mathbf{E}^i[F(X_{t+1}, W_{t+1}^\theta)|\ X_t].$$

両辺にρ^tをかけて移項すれば

$$\rho^t F(X_t, W_t^\theta) - \rho^{t+1}\mathbf{E}^i[F(X_{t+1}, W_{t+1}^\theta)|\ X_t] \geq \rho^t u(c_t). \tag{10}$$

両辺の期待値をとり，反復期待値の法則を用いれば

$$\mathbf{E}^i[\rho^t F(X_t, W_t^\theta)] - \rho^{t+1}\mathbf{E}^i[F(X_{t+1}, W_{t+1}^\theta)] \geq \mathbf{E}^i[\rho^t u(c_t)].$$

任意の$T \geq 1$に対し，時刻$t=0$から$t=T$まで上の式の和を計算すれば，左辺の各項が互い違いにキャンセルして，結局

$$\mathbf{E}^i[F(X_0, W_0^\theta)] - \rho^{T+1}\mathbf{E}^i[F(X_{T+1}, W_{T+1}^\theta)] \geq \mathbf{E}^i\left[\sum_{t=0}^{T}\rho^t u(c_t)\right]$$

となる。Fは有界，$\rho \in (0,1)$であるから，$T \to \infty$のとき左辺の極限は$F(i,w)$になる。優越収束定理 1.1 によって，右辺の極限は$U^i(c)$になる。かくして$F(i,w) \geq U^i(c)$となり，これは任意のi, wに対して$F(i,w) \geq V(i,w)$を意味する。以上の計算はフィードバック政策(c^*,θ^*)にも当てはまる。このフィードバック政策に関してC, Φの定義を用いれば，(10) の不等式を等式で置き換えることができる。このことによって，最終的に$F(i,w) = U^i(c^*)$を得る。(i,w)は任意であったから，Vは実際に値関数であり，かつ(c^*,θ^*)が最適政策であるということを意味している。したがって定理の主張は証明された。　□

本質的な部分はBlackwellの不動点定理2.1で既に明らかにされたとおりであり，この定理はそれの言い換えにすぎない (13)。

3．Markov ダイナミック・プログラミングと Markov 均衡

前節では，最適制御が現在の状態－富の組合わせ(i,w)で表わされる最適消費およびポートフォリオを特定する政策関数CおよびΦによって与えられるとしたとき，フィードバック型の最適制御が存在することが示された。同じアプローチによって均衡を特徴づけるために，この節ではより強い効用条件を採用することにする。uが狭義に増加・有界・凹かつ連続であるとした最初の仮定につけ加えて，次の正則条件を設定する。

仮定 A. 関数uは $(0,\infty)$において狭義に凹かつ微分可能である。

前節で導入した状態価格関数$\mathfrak{S}$によって，Markov 均衡を特徴づけることに進む。

定義 3.1 最適フィードバック制御C,Φを任意のiに対して$C(i,0)=g(i)$, $\Phi(i,0)=0$となるように選ぶことができるとき，状態価格関数$\mathfrak{S}$を **Markov 単一参加者均衡**という。

注意 3.1 Duffie［19, Chp.1, Sec. E, Prop.］によれば，単一参加者経済$[(U_\lambda,e),D]$の均衡（最適ポートフォリオと状態価格の組み）は $(0,q)$で与えられる。したがって，（4）（5）から任意のiに対して$w=0$, $\Phi(i,0)=0$, $C(i,0)=g(i)$であれば，単一参加者経済はMarkov 均衡することがわかる。

この定義によれば，参加者が自分の賦存額以上にいかなる資産も当初与えられていない場合には，消費および証券市場は常に清算される。均衡に関しては，ポートフォリオの空売り制約は不必要である。なぜなら，解$(e,0)$はこの空売り制約に拘束されていないからである。さらに，以下で示される均衡（しかもこれは一意である）は，$-b$に選ばれた特定の下界に依存していない。ここの主要目的は，Markov 単一参加者均衡$\mathfrak{S}$の特徴づけを示すことにある。

命題 3.1 $\mathfrak{S}$**が** Markov **単一参加者均衡であるための必要十分条件は，すべての**i**に対して**

$$\mathfrak{S}(i) = \frac{1}{u'[g(i)]}\mathbf{E}^i\left(\sum_{t=1}^{\infty}\rho^t u'[g(X_t)]f(X_t)\right) \tag{11}$$

が成り立つことである。

反復期待の法則によって，(11) と同等な以下のような表現を得る。これは確率的 Euler 方程式と呼ばれることがある。

系 3.1　**$\mathfrak{S}$ が Markov 単一参加者均衡であるための必要十分条件は，任意の時刻 t と任意の初期状態 i に対して**

$$\mathfrak{S}(X_t) = \frac{1}{u'[g(X_t)]}\mathbf{E}^i\left(\rho u'[g(X_{t+1})][\mathfrak{S}(X_{t+1}) + f(X_{t+1})]\,\middle|\, X_t\right) \tag{12}$$

が成り立つことである。

定理 3.1　**$\mathfrak{S}$ が Markov 均衡であるための必要十分条件は**

$$\mathfrak{S}(i) = \frac{1}{u'[g(i)]}\mathbf{E}^i\left(\rho u'[g(X_2)][\mathfrak{S}(X_2) + f(X_2)]\right), \quad i \in Z \tag{13}$$

が成り立つことである。言い換えれば，Bellman 方程式 (7) の1階条件と V が Bellman 方程式の解であるという事実によって，C および Φ はすべての i に対して (13) であるとき，かつそのときに限り $C(i,0) = g(i)$ かつ $\Phi(i,0) = 0$ となるように選ぶことができる。このとき (13) は (11) および (12) と同等となり，上の命題と系が証明される。

値関数 V の特性を探求することによって，上の Markov 均衡 $\mathfrak{S}$ の特徴づけに関する定理 3.1 を証明することにする。このために，いくつか準備をしておく。

補題 3.1　**各々の状態 i に対して，$V(i,\cdot):[\underline{w},\infty) \to \mathbb{R}$ は増加かつ狭義に凹である。**

証明　(狭義の凹性) Blackwell の不動点定理 2.1 によって V が作用素 $\mathfrak{U}$ の一意な不動点 $V = \mathfrak{U}V$, $V = \lim_{t\to\infty} F_t$,　$F_t = \mathfrak{U}F_{t-1}$ であることは証明された。$B(D)$ の定義を $F(i,\cdot):[\underline{w},\infty) \to \mathbb{R}$ が狭義に凹と変更したものを $\overline{B}(D)$ で表わすことにする。補題 2.1 の証明と同様の議論により，$F \in \overline{B}(D)$ であれば，

$\mathfrak{U}F \in \overline{B}(D)$ であることがわかる。$u(\cdot)$ は有界・狭義に凹かつ増加であるから，$F_0(i,w) = \sup_{(\bar{c},\bar{\theta})} u(\bar{c})$, s.t. $\bar{c}+\bar{\theta}\mathfrak{S}(i) \le w + g(i)$ は各々の i に対し w に関して有界・狭義に凹かつ増加，$F_0 \in \overline{B}(D)$ である。したがって $F_1 = \mathfrak{U}F_0$ は $F_1 \in \overline{B}(D)$ である。$t=n$ のとき $F_n \in \overline{B}(D)$ であるとすれば，$\mathfrak{U}F_n = F_{n+1}$ であるから $F_{n+1} \in \overline{B}(D)$ である。かくして負でないすべての整数 t に対して $F_t \in \overline{B}(D)$ である。よって $V = \lim_{t\to\infty} F_t$（一様収束性）から $V \in \overline{B}(D)$ である。

（増加） 増加を証明するため，(i,w) に対する最適フィードバック政策 $(C(i,w),\Phi(i,w))$ に関して，以下のような関数 $v:[\underline{w},\infty) \to \mathbb{R}$ を定義する。

$$v(w) = u(C(i,w_0)+w-w_0) + \rho\mathbf{E}^i\left[V\left(X',\Phi(i,w_0)\cdot[\mathfrak{S}(X')+f(X')]\right)\right],\quad w_0 \in [\underline{w},\infty).$$

u は増加関数であるから $w \ge w_0$ ならば $v(w) \ge v(w_0)$ 。Bellman 方程式 $V = \mathfrak{U}V$ の一意解を $V(i,w)$ で表わすことにする。V の最適性から $V(i,w) \ge v(w)$，定義より $V(i,w_0) = v(w_0)$。したがって

$$V(i,w) - V(i,w_0) \ge v(w) - v(w_0).$$

したがって

$$w - w_0 \quad \text{ならば} \quad V(i,w) - V(i,w_0) \ge v(w) - v(w_0) \ge 0.$$

これは V の w に関する増加性を示している。 □

補題 3.2 状態価格関数 $\mathfrak{S}$ を任意に固定し，(C,Φ) を上述の最適フィードバック政策とする。所与の状態 i および $\hat{w} > \underline{w}$ において，$\hat{c} = C(i,\hat{w})$ と仮定する。このとき $V(i,\cdot)$ は $\hat{w}$ において連続微分可能であり，導関数 $V_w(i,\hat{w}) = u'(\hat{c})$ を持つ (14)。

証明 関数 $v: S \to \mathbb{R}$, $S \subset [\underline{w},\infty)$

$$v(w) = u(C(i,\hat{w})+w-\hat{w}) + \rho\mathbf{E}^i\left[V\left(X',\Phi(i,\hat{w})\cdot[\mathfrak{S}(X')+f(X')]\right)\right]$$

を定義する。ただし，$\hat{w} \in S$ とし，V は Bellman 方程式 $V = \mathfrak{U}V$ を満たす一意

な解とする。定義から明らかに

$$v(\hat{w}) = V(i, \hat{w}).$$

また，V の最適性から $w \in S$ に対して

$$v(w) \leq V(i, w).$$

V の凹性から

$$k(w - \hat{w}) \geq V(i, w) - V(i, \hat{w}) \geq v(w) - v(\hat{w}).$$

ところで v は微分可能である。なぜなら実際に

$$v'(w) = u'(C(i, \hat{w}) + w - \hat{w})$$

であるからである。したがって，上式において $w \neq \hat{w}$ として両辺を $w - \hat{w}$ で除して $w \to \hat{w}$ とすれば

$$V_w(i, \hat{w}) = v'(\hat{w}) = u'(C(i, \hat{w})$$

を得る。V は狭義に凹であるから，その導関数は連続である。

上の二つの補題を用いれば，以下の定理によって状態価格関数 $\mathfrak{S}$ が Markov 均衡であるための必要十分条件が得られ，先の命題と系の関連を示すことができる。

定理 3.1 の証明　$V \in \overline{B}(D)$，すなわち各状態 i に対して $V(i,\cdot)\colon [\underline{w},\infty) \to \mathbb{R}$ が狭義に凹であるから，最適フィードバック政策が存在すればそれは一意である。したがって，必要性か十分性の一方を確かめればよい。

Bellman 方程式 $V = \mathfrak{U}V$ を次のように書き改める。任意の $(i, w) \in D$ に対して

$$V(i, w) = \sup_{\theta \in \mathbb{R}^N} \left[u[w + g(i) - \theta \cdot \mathfrak{S}(i)] + \rho \mathbf{E}^i \left[V\left(X_2, \theta \cdot [\mathfrak{S}(X_2) + f(X_2)] \right) \right] \right].$$

最適性に関する1階の必要条件

$$0 = -u'[w + g(i) - \theta \cdot \mathfrak{S}(i)]\mathfrak{S}(i) + \rho \mathbf{E}^i \left[V_w\left(X_2, \theta \cdot [\mathfrak{S}(X_2) + f(X_2)] \right) [S(X_2) + f(X_2)] \right]$$

から $\mathbb{R}^N$ の内点 $\theta = \Phi(i,0) = 0$（したがって $c = C(i,0) = g(i) > 0$ を意味する）が最適フィードバック政策であれば

$$-u'[g(i)]\mathfrak{S}(i) + \rho \mathbf{E}^i [V_w(X_2, 0)[\mathfrak{S}(X_2) + f(X_2)]] = 0.$$

補題 3.2 から $V_w(i,0)=u'[g(i)]$ であるから

$$\mathfrak{S}(i)=\frac{1}{u'[g(i)]}\mathbf{E}^i\Big[\rho u'[g(X_2)][\mathfrak{S}(X_2)+f(X_2)]\Big].$$

したがって，(13) を得る。

次に，(11)，(12)，(13) の同等性を証明する。(11) がすべての $i\in Z$ に対して成り立つのであるから

$$\begin{aligned}
u'[g(X_t)]\mathfrak{S}(X_t) &= \mathbf{E}\left(\sum_{k=t+1}^{\infty}\rho^{k-t}u'[g(X_k)]f(X_k)\,\middle|\, X_t=i\right)\\
&= \mathbf{E}\left(\rho u'[g(X_{t+1}]f(X_{t+1})+\sum_{k=t+2}^{\infty}\rho^{k-t}u'[g(X_k)]f(X_k)\,\middle|\, X_t=i\right)\\
&= \mathbf{E}\left(\rho u'[g(X_{t+1}]f(X_{t+1})+\rho\sum_{k=t+2}^{\infty}\rho^{k-(t+1)}u'[g(X_k)]f(X_k)\,\middle|\, X_t=i\right)\\
&= \mathbf{E}\big(\rho u'[g(X_{t+1}]f(X_{t+1})|X_t=i\big)\\
&\quad+\mathbf{E}\left(\rho\mathbf{E}\left(\sum_{k=t+2}^{\infty}\rho^{k-(t+1)}u'[g(X_k)]f(X_k)\,\middle|\, X_{t+1}\right)\middle|\, X_t=i\right)\\
&= \mathbf{E}\left(\rho u'[g(X_{t+1}]f(X_{t+1})|X_t=i\right)+\mathbf{E}\left(\rho u'[g(X_{t+1})]\mathfrak{S}(X_{t+1})\,\middle|\, X_t=i\right)\\
&= \mathbf{E}\left[\rho u'[g(X_{t+1})][\mathfrak{S}(X_{t+1})+f(X_{t+1})]\,\middle|\, X_t=i\right].
\end{aligned}$$

これより (12) を得る。逆に，任意の t に対して (12) が成り立っておれば $T<\infty$ に対して

$$
\begin{aligned}
u'[g(X_t)]\mathfrak{S}(X_t) &= \mathbf{E}^i(\rho u'[g(X_{t+1})][\mathfrak{S}(X_{t+1}) + f(X_{t+1})]|X_t) \\
&= \mathbf{E}^i(\rho u'[g(X_{t+1})]\mathfrak{S}(X_{t+1}) + \rho u'[g(X_{t+1})]f(X_{t+1})|X_t) \\
&= \mathbf{E}^i\bigl(\rho \mathbf{E}^i(\rho u'[g(X_{t+2})][\mathfrak{S}(X_{t+2}) + f(X_{t+2})]|X_{t+1}) + \rho u'[g(X_{t+1})]f(X_{t+1})|X_t\bigr) \\
&= \mathbf{E}^i(\rho^2 u'[g(X_{t+2})]\mathfrak{S}(X_{t+2}) + \rho^2 u'[g(X_{t+1})]f(X_{t+1}) + \rho u'[g(X_{t+1})]f(X_{t+1})|X_t) \\
&\quad \cdots \\
&= \mathbf{E}^i\left(\rho^T u'[g(X_{t+T})]\mathfrak{S}(X_{t+T}) + \sum_{k=t+1}^{T+t} \rho^{k-t} u'[g(X_k)]f(X_k)\middle| X_t\right) \\
&= \rho^T \mathbf{E}^i(u'[g(X_{t+T})]\mathfrak{S}(X_{t+T})|X_t) + \mathbf{E}^i\left(\sum_{k=t+1}^{T+t} \rho^{k-t} u'[g(X_k)]f(X_k)\middle| X_t\right).
\end{aligned}
$$

$T \to \infty$ とすれば最右辺第 1 項は $0 < \rho < 1$ であるから 0 に収束する。そこで $t = 0$ とおけば

$$
u'[g(i)]\mathfrak{S}(i) = \mathbf{E}^i\left(\sum_{k=1}^{\infty} \rho^k u'[g(X_k)]f(X_k)\middle| X_0\right).
$$

したがって（11）を得る。

（12）は任意の t に対して成り立つのであるから，（12）において $t = 0$ とおけば

$$
u'[g(i)]\mathfrak{S}(i) = \mathbf{E}^i[\rho u'[g(X')][\mathfrak{S}(X') + f(X')]], \quad X' \in Z,
$$

すなわち（13）を得る。すべての $i \in Z$ に対して（13）が成り立つのであるから，$X_t = i$ とおくことによって（12）を得る。

よって定理の主張はすべて証明された。□

4．裁定と状態価格
——状態価格版配当割引モデルと無限期間設定——

次に，抽象的な無限期間の設定で証券価格に関する無裁定および最適性がいかなる意味を持っているかを検証するために，Markov 的な不確実性という特殊

なケースから離れることにする。

Ω をある集合，$\mathfrak{F}$ を Ω に対するある族であるとし，各々の非負整数 t に対して $\mathfrak{F}_t$ を $s \geq t$ ならば $\mathfrak{F}_t \subseteq \mathfrak{F}_s$ であるような非減少有限部分族であるとする。また，$(\Omega, \mathfrak{F})$ 上のひとつの確率測度 $\mathbf{P}$ を固定する。通常の場合と同様，$\mathfrak{F}_0$ は確率が 0 または 1 であるような事象のみを含んでいるものとする。再び，L によって有界適合過程の空間を表すことにする。N 種の証券が存在し，第 n 証券は L に属する配当過程 δ^n と L に属する価格過程 S^n によって定義されるものとする。取引戦略は $\theta = (\theta^1, \ldots, \theta^N) \in \Theta \equiv L^N$ で表されるものとする。

定義 1.1 の内容を繰り返せば，**裁定**とは，$\delta^\theta > 0$ であるような取引戦略 θ である。裁定が存在しないならば，任意の T に対して T **期裁定**が存在しない。T 期裁定とは，$\theta_t = 0, t \geq T$ であるような裁定 θ を意味する。一時的に T を固定したとき，T 期裁定が存在しないならば，T 期状態価格デフレータ（定義 1.2）が存在することになる。同様に，$(T+1)$ 期状態価格デフレータ π^{T+1} が存在する。$\hat{\pi}_t = \pi_t^T$, $t \quad T$ かつ $\hat{\pi}_t = \pi_t^{T+1}, t > T$ によって定義される過程 $\hat{\pi}$ が $(T+1)$ 期状態価格デフレータであることを示すことができる。実際，T 期裁定が存在しないのであるから

$$\theta_t = 0, \ t \geq T$$

であるような任意の取引戦略 θ に対して

$$\delta^\theta_{T+1} = \theta_T \cdot (S_{T+1} + \delta_{T+1}) - \theta_{T+1} \cdot S_T = 0, \quad \mathbf{E}\left(\sum_{t=0}^{T} \pi_t^T \delta_t^\theta\right) = 0$$

となる。したがって

$$\mathbf{E}\left(\sum_{t=0}^{T} \pi_t^T \delta_t^\theta\right) + \pi_{T+1}^{T+1} \delta_{T+1}^\theta = 0.$$

ゆえに

$$\mathbf{E}\left(\sum_{t=0}^{T+1}\hat{\pi}_t\delta_t^\theta\right)=\mathbf{E}\left(\sum_{t=0}^{T}\pi_t^T\delta_t^\theta\right)+\hat{\pi}_{T+1}^{T+1}\delta_{T+1}^\theta=0.$$

以上のことによって，T における帰納法から，ある T 以上のすべての t に対して $\theta_t=0$ となる任意の取引戦略 θ に対して，$\mathbf{E}(\sum_{t=0}^{\infty}\pi\delta_t^\theta)=0$ となるような狭義に正の適応過程 π が存在するということがわかる。特に，任意の t と $\tau\geq t$ に対して，π はすでに表れた状態価格の関係式

$$S_t=\frac{1}{\pi_t}\mathbf{E}_t\left(\pi_\tau S_\tau+\sum_{j=t+1}^{\tau}\pi_j\delta_j\right) \tag{14}$$

を満足するという特長を持っている。(14) は，いわば**状態価格版配当割引モデル**とみなすことができる [15]。

方程式 (14) は，τ が有限の停止時刻であれば常に成り立つ。しかし残念ながら，(14) が無限の停止時刻に対して成り立つような状態価格デフレータ（すなわち狭義に正の適応過程）$\pi\in L$，すなわち任意の t に対して

$$S_t=\frac{1}{\pi_t}\mathbf{E}_t\left(\sum_{j=t+1}^{\infty}\pi_j\delta_j\right) \tag{15}$$

が存在するという根拠は（今のところはまだ）ない。仮に存在するとしても，資産価格のバブルの理論が示すように [16]，π の一意性が保証し得なくなるかもしれない。事実，(15) の右辺は定義することすら十分にはなし得ないかもしれない。このためには π にある種の制約が課されなければならないのである。

そこで，以下のように π の属する空間を制約することにする。

定義 4.1　適応過程 x は $\mathbf{E}(\sum_{t=0}^{\infty}|x_t|)<\infty$ であれば**平均加算的**であるということにする。また，L^* によって**平均加算的適応過程の空間**を表すことにする [17]。

$\pi\in L^*$ かつ $c\in L$ であれば，Lebesgue の優越収束定理 1.1 によって，$\mathbf{E}(\sum_{t=0}^{\infty}\pi_t c_t)$ を定義することができ，しかもそれは有限値をとることがわか

る。したがって，(15) が機能すれば，L^*は状態価格デフレータの候補の空間として自然なものであるということができる。

5. 最適性と状態価格 ——線形汎関数$\nabla U(c,x)$のRiesz表現 $\pi \in L^*$と状態価格デフレーター——

任意の市場参加者は，Lに属する非負過程の空間L_+に属する賦存額の過程eと，狭義に増加である効用関数$U: L_+ \to \mathbb{R}$によって定義される。配当と価格の組 $(\delta, S) \in L^N \times L^N$ を所与として，参加者は実行可能予算集合 $X(S,e) = \{e + \delta^\theta \in L^\theta : \theta \in \Theta\}$を持ち，以下のような問題に直面するものとする。

$$\sup_{c \in X(S,e)} U(c). \tag{16}$$

すなわち，(16) は，実行可能予算集合$X(S,e)$から最適消費計画cを選ぶ市場参加者の効用最大化問題である。この問題と，第1節で述べた市場参加者の効用最大化問題，あるいは，第2節のMarkov制御問題 (2) との対応は明らかであろう。

Lに属する任意の消費過程cに対して，c^*におけるcの方向へのUの導関数は，絶対値において十分に小さいスカラーαに対して$g(\alpha) = U(c^* + \alpha c)$の導関数$g'(0)$で定義され，これを$\nabla U(c^*; c)$で表すことにする。

定義 5.1 Uがc^*において微分可能であるとは，Lに属する任意のcに対して導関数$\nabla U(c^*; c)$が存在することをいう。

Uがcにおいて微分可能であれば，$\nabla U(c)$はL上の線形汎関数となることが知られている。内積 $(x|y)$を

$$(x|y) \equiv \mathbf{E}\left(\sum_{t=0}^{\infty} x_t y_t\right), \quad x \in L^*,\ y \in L$$

で定義すれば，Riesz の表現定理より，$\nabla U(c)$には一意な Riesz 表現が存在する [18]。したがって，次のように定義することは自然である。

定義 5.2　勾配 $\nabla U(c)$が存在し，かつ L に属する任意の到達可能な方向 x に対して

$$\nabla U(c,x) = \mathbf{E}\left(\sum_{t=0}^{\infty} \pi_t x_t\right)$$

で定義される L^* に属する Riesz 表現 π を持つならば，効用関数は L^*-スムーズであるという。

第 3 節では，状態価格関数$\mathfrak{S}$が Markov 均衡であるための必要十分条件は，$\mathfrak{S}$が確率 Euler 方程式（12）を満たすことであることが示された。本節ではこれに対応する結果を導くことが目的である。すなわち，Markov 設定に依存することなく（12）を均衡の必要条件とすることができることを示す（系 5.1）。十分性を示すために，確率的 Euler 方程式によって S がある均衡であることを示唆する均衡条件を与える。

定義 5.3　証券価格 $S \in L^N$ を所与として e が（16）の解になるとき，この S を単一参加者均衡と定義する。

以下の定理 5.1 に示されるように，S が単一参加者経済の均衡であるための必要十分条件は，$\nabla U(e)$の Riesz 表現 $\pi \in L^*$ が状態価格デフレータとなることを最終結果として主張することができる。

定理 5.1　U **は狭義増加，凹かつ賦存額過程** e **の下で** L^***-スムーズであるとする。賦存額過程** e **はゼロから有界であるとする。** $\pi \in L^*$ **を** $\nabla U(e)$ **の Riesz 表現とする。** S **が単一参加者均衡となるための必要十分条件は，** π **が状態価格デフレータとなることである。**

以下はこの定理 5.1 を証明することに費やされる。そのためにいくつかの準備が必要になる。

U が加算的効用であれば，以下の補題が成り立つことがわかる [19]。

補題 5.1　U **が** $U(c) = \mathbf{E}[\sum_{t=0}^{\infty} \rho^t u(c_t)]$ **で定義されているとする。ただし，**

$u: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ が狭義増加かつ $(0, \infty)$ で連続微分可能，また，$\rho \in (0,1)$ とする。このとき，0から有界な L_+ に属する任意の c に対して，U は c において L^*-スムーズ，L に属する任意の x は c において到達可能方向であり，かつ，以下の関係が成り立つ。

$$\nabla U(c; x) = \mathbf{E}\left[\sum_{t=0}^{\infty} \rho^t u'(c_t) x_t\right], \quad x \in L. \tag{17}$$

証明　u が狭義に増加，かつ，$(0, \infty)$ で連続微分可能，かつ $c \in L_+$（すなわち確率過程 $\{c_t\}_{t=0}^{\infty}$ は，すべての時刻 t において c_t は $\mathfrak{F}_t$ 可測かつ $0 \le c_t \le k$ である非負有界適合過程）であるから，任意の時刻 t において $u(c_t) \le u(k) < \infty$。したがって $u'(c_t) \le M < \infty$ であるような適当な定数 M が存在するから $0 < \rho^t u'(c_t) \le \rho^t M$ となる。したがって

$$\mathbf{E}\left(\sum_{t=0}^{\infty} \rho^t u'(c_t)\right) \le \frac{M}{\rho} < \infty,$$

すなわち確率過程 $\{\rho^t u'(c_t)\}$ は $\{\rho^t u'(c_t)\} \in L^*$。$U(c) = \mathbf{E}[\sum_{t=0}^{\infty} \rho^t u(c_t)]$ において関数 $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(\alpha) = U(c + \alpha x)$$

を定義する。このとき優越収束定理 1.1 から

$$\begin{aligned}
\nabla U(c; x) &\equiv g'(0) \\
&= \lim_{\alpha \to 0} \frac{U(c + \alpha x) - U(c)}{\alpha} \\
&= \lim_{\alpha \to 0} \mathbf{E}\left(\sum_{t=0}^{\infty} \rho^t \left[\frac{u(c_t + \alpha x_t) - u(c_t)}{\alpha x_t}\right] x_t\right) \\
&= \mathbf{E}\left(\sum_{t=0}^{\infty} \rho^t u'(c_t) x_t\right).
\end{aligned}$$

したがって，$\pi_t = \rho^t u'(c_t)$ で定義される確率過程 π は $\nabla U(c)$ の一意な Riesz

表現であるから，状態価格デフレータである。 □

この補題から以下のような状態価格の特徴が明らかになる。

命題 5.1　c^* **は（16）の解であり，** c^* **は0から有界で，かつ，** U **が** c^* **で** L^***-スムーズであるとする。このとき，** $\nabla U(c^*)$ **の Riesz 表現** π **は状態価格デフレータである。**

証明　c^* の最適性の1階条件から

$$\nabla U(c^*;\delta^\theta)=0,\quad \theta\in\Theta.$$

U は L^*-スムーズであるから，L に属する任意の x に対して

$$\nabla U(c^*;x)=\mathbf{E}\left(\sum_{t=0}^{\infty}\pi_t x_t\right).$$

したがって，任意の取引戦略 θ に対して

$$\mathbf{E}\left(\sum_{t=0}^{\infty}\pi_t \delta_t^\theta\right)=0.$$

ここで，任意の停止時刻 $\tau<\infty$ と任意の証券 n に対して

$$\begin{cases}\theta^k=0, & \text{for } k\neq n,\\ \theta_t^n=1, & \text{for } t<\tau,\\ \theta_t^n=0, & \text{for } t\geq\tau\end{cases}$$

となる取引戦略 θ を考える。このとき

$$\begin{aligned}&\delta_0^\theta=-S_0^n,\\ &\delta_t^\theta=\delta_t^n,\quad t<\tau,\\ &\delta_\tau^\theta=S_\tau^n+\delta_\tau^n\end{aligned}$$

であるから

$$
\begin{aligned}
0 &= \mathbf{E}\left(\sum_{t=0}^{\infty}\pi_t\delta_t^{\theta}\right) \\
&= \mathbf{E}\left(\sum_{t=0}^{\tau-1}\pi_t\delta_t^{\theta} + \pi_\tau S_\tau\right) \\
&= \mathbf{E}\left(\sum_{t=0}^{\tau-1}\pi_t\delta_t^{n} + \pi_\tau S_\tau^n + \pi_\tau\delta_\tau^n\right) \\
&= \mathbf{E}\left(\sum_{t=1}^{\tau}\pi_t\delta_t^{n} + \pi_\tau S_\tau^n - \pi_0 S_0^n\right).
\end{aligned}
$$

n, τ は任意であったから，したがって

$$
S_0 = \frac{1}{\pi_0}\mathbf{E}\left(\sum_{j=1}^{\tau}\pi_j\delta_j + \pi_\tau S_\tau\right),
$$

すなわち

$$
S_t = \frac{1}{\pi_t}\mathbf{E}_t\left(\sum_{j=t+1}^{\tau}\pi_j\delta_j + \pi_\tau S_\tau\right)
$$

を得る。これは状態価格関係式(14)である。 □

系 5.1　さらに，U が $U(c) = \mathbf{E}[\sum_{t=0}^{\infty}\rho^t u(c_t)]$ で定義されているとする。ただし，$\rho \in (0,1)$ かつ u は $(0,\infty)$ で狭義に正の導関数を持つものとする。このとき，$\pi_t = \rho^t u'(c_t^*)$ で定義される π は状態価格デフレータであり，任意の時刻 t と停止時刻 $\tau > t$ に対して次式が成り立つ。

$$
S_t = \frac{1}{u'(c_t^*)}\mathbf{E}_t\left[\rho^{\tau-t}u'(c_\tau^*)S_\tau + \sum_{j=t+1}^{\tau}\rho^{j-t}u'(c_j^*)\delta_j\right].
$$

証明　$\pi_t = \rho^t u'(c_t)$ で定義される $\nabla U(c^*)$ の一意な Riesz 表現 π が状態価格デフレータであることはすでに示した。また

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_t\left(\sum_{j=t+1}^{\infty}\pi_j\delta_j\right) &= \mathbf{E}_t\left(\sum_{j=t+1}^{\tau}\pi_j+\delta_j+\sum_{j=\tau+1}^{\infty}\pi_j\delta_j\right)\\
&= \mathbf{E}_t\left(\sum_{j=t+1}^{\tau}\pi_j\delta_j\right)+\mathbf{E}_t\left(\mathbf{E}_\tau\left(\sum_{j=\tau+1}^{\infty}\pi_j\delta_j\right)\right)\\
&= \mathbf{E}_t\left(\sum_{j=t+1}^{\tau}\pi_j\delta_j\right)+\mathbf{E}_t(S_\tau\pi_\tau).
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
S_t &= \frac{1}{\pi_t}\mathbf{E}_t\left(\sum_{j=t+1}^{\infty}\pi_j\delta_j\right)\\
&= \frac{1}{\pi_t}\mathbf{E}_t\left(\pi_\tau S_\tau+\sum_{j=t+1}^{\tau}\pi_j\delta_j\right)\\
&= \frac{1}{\rho^t u'(c_t^*)}\mathbf{E}_t\left(\rho^\tau u'(c_\tau^*)S_\tau+\sum_{j=t+1}^{\tau}\pi_j\delta_j\right)\\
&= \frac{1}{u'(c_t^*)}\mathbf{E}_t\left(\rho^{\tau-t}u'(c^*)S_\tau+\sum_{j=t+1}^{\tau}\rho^{j-t}u'(c_j^*)\delta_j\right).
\end{aligned}
$$

かくして与えられた主張は証明された。 □

この系は最適性の必要条件を与える。均衡のケースが特定化されれば，Markov 不確実性や動的計画法に依拠することなしに，確率的 Euler 方程式 (12) を均衡の必要条件として復活させることができる。十分性に関しては，確率的 Euler 方程式によって S が均衡であることを示唆する条件を与える必要がある。定義 5.3 で定義したように，S を所与として e が（16）の解になるとき，この S を単一参加者均衡と定義することによって必要な条件を与える。このようにすれば最終的な結果（定理 5.1）を証明することができる。

定理 5.1 の証明　S が単一参加者均衡であれば，e は（16）の解であるから与えられた前提の下で，命題 5.1 から $\nabla U(e)$ の一意な Riesz 表現 $\pi \in L^*$ は状態価格デフレータである。

逆に，$\nabla U(e)$ の Riesz 表現 $\pi \in L^*$

$$\nabla U(e; x) = \mathbf{E}\left(\sum_{t=0}^{\infty} \pi_t x_t\right)$$

が所与の S に対して状態価格デフレータ

$$S_t = \frac{1}{\pi_t}\mathbf{E}_t\left(\sum_{j=t+1}^{\infty} \pi_j \delta_j\right)$$

であるとする。$\delta_t^\theta = \theta_{t-1} \cdot (S_t + \delta_t) - \theta_t \cdot S_t$ であるから，このとき

$$\pi_0 \delta_0^\theta = -\theta_0 \cdot \mathbf{E}\left(\sum_{t=1}^{\infty} \pi_t \delta_t\right),$$

$$\mathbf{E}(\pi_0 \delta_0^\theta + \pi_1 \delta_1^\theta) = -\theta_1 \cdot \mathbf{E}\left(\sum_{t=2}^{\infty} \pi_t \delta_t\right),$$

$$\cdots$$

$$\mathbf{E}\left(\sum_{t=0}^{T} \pi_t \delta_t^\theta\right) = -\theta_T \cdot \mathbf{E}_T\left(\sum_{t=T+1}^{\infty} \pi \delta_t\right), \quad (0 \le T < \infty)$$

$$\cdots.$$

$T \to \infty$ のとき優越収束定理 1.1 より

$$\mathbf{E}\left(\sum_{t=0}^{\infty} \pi \delta_t^\theta\right) = 0$$

となるから

$$\nabla U(e; \delta^\theta) = 0.$$

U は狭義増加な凹関数であったから，これは e の最適性を示している。したが

って，Sは単一参加者均衡である。　□

A　補　論

一般に，凸関数fに対してJensenの不等式

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\le\frac{1}{n}\big(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\big)$$

が成り立つ。

命題 A.1　**$f:(a,b)\to\mathbb{R}$が有界な凸関数であるとする。このときfは(a,b)の内部で連続である。**

証明　$x\in(a,b)$に対して$N_{n\delta}(x)\in[a,b]$であるとする。ここで

$$x_1=x+n\delta,\quad x_2=\cdots=x_n=x$$

に対してJensenの不等式を適用すれば

$$\begin{aligned}f(x+\delta)&=f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\\&\le\frac{1}{n}\big(f(x_1)+\cdots+f(x_n)\big)\\&=\frac{1}{n}f(x+n\delta)+\frac{n-1}{n}f(x).\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{f(x+n\delta)-f(x)}{n}\ge f(x+\delta)-f(x).$$

δの代わりに$-\delta$とおけば

$$f(x)-f(x-\delta)\ge\frac{f(x)-f(x-n\delta)}{n}.$$

fの凸性から$f(x)\le(f(x+\delta)+f(x-\delta))/2$，したがって

$$f(x+\delta)-f(x)\ge f(x)-f(x-\delta).$$

ゆえに

$$\frac{f(x+n\delta)-f(x)}{n} \geq f(x+\delta)-f(x)$$
$$\geq f(x)-f(x-\delta) \geq \frac{f(x)-f(x-n\delta)}{n}.$$

f は $[a,b]$ で上に有界であることより $f(x) \leq M$ なる定数 M が存在する。したがって

$$\frac{K-f(x)}{n} \geq f(x+\delta)-f(x) \geq f(x)-f(x-\delta) \geq \frac{f(x)-K}{n}.$$

上式で $n \to \infty$ とすれば $\delta \to 0$ となるから

$$\lim_{|\delta| \to 0} \left[f(x+\delta)-f(x) \right] = 0.$$

これは f が (a,b) で連続であることを示している。 □

[注]

（1） 唯一の例外は Duffie [18,19, Chp.4, Sec. A, Thm.] であるが，作用素 $\mathfrak{U}$ の定義の相違によってこの定理の証明は完全に同じわけではない。後の注 (8), (13) を参照されたい。

（2） 「優越収束定理」は dominated convergence theorem の訳語である。しかし伊藤 [1, p.2] が指摘するように，dominated convergence theorem には適当な訳語がない。本稿では，「有界収束定理」(bounded convergence theorem) と区別するために，あえてこの訳語を採用した。

（3） $\delta \in L_+$ ではなく $\delta \in L$ で定義されているから，一般に「負の」配当も排除されていないことに注意せよ。

（4） 以下の裁定の定義は，現在もっとも一般に採用されている Ross [29] の裁定の定義と矛盾するものではないことは明らかである。

（5） すなわち，賦存額過程 e とは，証券取引（配当 δ^θ）以外から市場参加者が受け取る（サラリーのような）非負の付加的利得過程を意味する。

（6） これは，定常推移確率行列を有するということを意味する。

（7） Markov 連鎖に関するいくつかの文献（たとえば Chung [15]，Freedman [20] 等）は，各々の i に関して，$\mathbf{P}_i(X_0 = i) = 1$ および q を所与の推移確率行列

として

$\mathbf{P}_i(X_{t+1}=j|\ X_0,\ldots,X_t)=q_{X_t,j}$,

という明らかな性質を満足する確率空間$(\Omega,\mathfrak{F},\mathbf{P}_i)$が存在することを説明している。

(8) Duffie［19, Chp.4, p.65］では，(7) と同一の作用素 $\mathfrak{U}$ の定義が採用されているが，Duffie［18, Chp.4, p.61］では，$\mathfrak{U}$ の定義として

$$\mathfrak{U}F(i,w)=\sup_{(\bar{\theta},\bar{c})\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}_+}\left[\rho u(\bar{c})+\rho\mathbf{E}^i\left[F\big(X_2,\bar{\theta}\cdot[\mathfrak{S}(X_2)+f(X_2)]\big)\right]\right]$$

を採用している。しかし Duffie［18］について，この作用素 $\mathfrak{U}$ の定義では以下の定理 2.2 の証明ができないと思われる。

(9) 凹関数（凸関数）の一般的な性質については，Rockafellar［28]，辻［7]，田中［6］等の文献を参照されたい。

(10) 補論の命題 A.1 を参照されたい。

(11) Blackwell［12］を参照されたい。ただし，以下の定理 2.1 の証明は Blackwell［12］とは独立である。

(12) Lucas［27］も縮小写像の原理によって，同様の定理を証明している。しかし，Lucas［27］の証明は位相空間における Berge［10］の主張を前提にしたもので，以下の証明とはまったく異なる。

(13) 以上の証明は Duffie［19, Chp.4, Sec. A, Thm.］と本質的に同一である。作用素 $\mathfrak{U}$ の定義の違いによって（注(8)を参照されたい)，Duffie［18, Chp.4, Sec. A, Thm.］とは証明が若干異なる。Duffie［18, Chp.4, Sec. A, Thm.］の証明は正しくないように思われる。

(14) Duffie［18, 19, Chp. 4, Sec. B, Fact.2］では

$V_w(i,\hat{w})=\rho u'(\hat{c})$

を主張している。Duffie［18］の作用素の定義であればこの主張は正しい。しかし，以下の証明で明らかになるように，(7) で定義される作用素 $\mathfrak{U}$ の場合にはこの主張は成り立たない。

(15) 配当割引モデルに関しては若杉［9,第 11 章]，米沢［8］を参照されたい。

(16) 資産価格のバブルの理論については Blanchard-Watson［13]，翁［4］を参照されたい。

(17) L^* は，無限期間の証券市場均衡の安定性を保証するある種のノルムを備えた，ノルム化ベクトル空間と見ることもできる。この点に関しては岩井［3, pp.138-9］が参考になろう。

(18) 上のように定義された内積 $(x|y)$ が内積の公理

1. 交換法則 $x, y \in L^*$ に対して $(x|y) = (y|x)$
2. 分配法則 $(x+y|z) = (x|z) + (y|z)$
3. ある実数 α に対して $(\alpha x|y) = \alpha(x|y)$
4. $(x|x) \geq 0$
5. $x = 0$ の場合に限り $(x|x) = 0$

を満たすことは明らか。したがって $L^* \subseteq L$ は Hilbert 空間になる。Hilbert 空間上の線形汎関数に対して，Riesz の表現定理を証明するのは容易である。

(19) この補題は Samuelson [30], Levhari-Srinivasan [26] と関連がある。Hakansson [21] も参照されたい。

《参考文献》

［1］ 伊藤清（1991）『岩波基礎数学選書 確率論』岩波書店
［2］ 伊藤清三・黒田成俊・藤田宏（1991）『岩波基礎数学選書 関数解析』岩波書店
［3］ 岩井克人（1987）『不均衡動学の理論』岩波書店
［4］ 翁邦雄（1985）『期待と投機の経済分析』東洋経済新報社
［5］ 柴川林也編（1985）『財務管理』中央経済社
［6］ 田中謙輔（1994）『数理情報科学シリーズ5 凸解析と最適化理論』牧野書店
［7］ 辻正次（1962）『実函数論』槇書店
［8］ 米沢康博（1985）「資本市場の理論と実際」（柴川編 ［5，第3章］収録）
［9］ 若杉敬明（1988）『企業財務論』東京大学出版会
[10] Berge, C. (1963), *Topological Spaces*, Macmillan.
[11] Bertsekas, D. and S. Shreve (1978), *Stochastic Optimal Control: The Discrete Time Case*, Academic Press.
[12] Blackwell, D. (1965), "Discounted Dynamic Programming," *Annals of Mathematical Statistics*, **36**, 226-35.
[13] Blanchard, O. and O. Watson (1984), "Bubble, Rational Expectations and

Financial Markets," in Wachtel [32].

[14] Brezis, H. (1983), *Analyse Functionnelle*, Masson Editeur.
(藤田宏監訳・小西芳雄訳『関数解析』産業図書 1988 年)

[15] Chung, K. L. (1967), *Markov Chain with Stationary Transition Probabilities*, 2nd. ed., Springer.

[16] Duffie, D. (1988), *Security Markets : Stochastic Models*, Academic Press.

[17] ——— (1991), "The Theory of Value in Security Markets," in Hildenbrand-Sonnenschein [23, Chp. 31].

[18] ——— (1991b), *Dynamic Asset Pricing Theory*, 1st ed., Princeton.

[19] ——— (1996), *Dynamic Asset Pricing Theory*, 2nd ed., Princeton.

[20] Freedman, D. (1983), *Markov Chains*, Springer.

[21] Hakansson, N. (1970), "Optimal Investment and Consumption Strategies under Risk for a Class of Utility Functions," *Econometrica*, **38**, 587-607.

[22] Harrison, J. M. and D. Kreps (1979), "Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets," *Journal of Economic Theory*, **20**, 381-408.

[23] Hildenbrand, W. and H. Sonnenschein ed. (1991), *Handbook of Mathematical Economics*, Vol. IV, Elsevier.

[24] Kolmogorov, A. N. and S. V. Fomin (1976), *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, in Russian.
(山崎三郎・柴岡泰光訳『函数解析の基礎(上・下)』岩波書店 1979 年)

[25] Liptser, R. S. and A. N. Shiryayev (1974), *Statistics of Random Processes*, I, II, Springer.

[26] Levhari, D. and T. Srinivasan (1969), "Optimal Saving under Uncertainty," *Review of Economic Studies*, **59**, 153-165.

[27] Lucas, R. E., Jr. (1978), "Asset Prices in an Exchange Economy," *Econometrica*, **46**, 1429-45.

[28] Rockafellar, T. R. (1970), *Convex Analysis*, Princeton.

[29] Ross, S. (1978), "A Simple Approach to the Valuation of Risky Streams," *Journal of Bussiness*, **51**, 453-475.

[30] Samuelson, P. (1969), "Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming," *Review of Economics and Statistics*, **51**, 239-46.

[31] Shiryayev, A. N. (1995), *Probability*, 2nd ed., Springer.

[32] Wachtel, P. ed. (1984), *Crises in Economics and Financial Structures*, D. C. Heath.