ID	JJF00175

論文名	柔軟性を持つ投資プロジェクトに対する不完備市場下での最適戦略
	The optimal portfolio strategy of the project with flexibility under the incomplete market
著者名	今井潤一
	Junichi Imai
ページ	109-133

名称	日本経営財務研究学会編『コーポレート・ファイナンスの理論と実証』中央経済社
発行巻号	経営財務研究双書 18
	Vol. 18
発行年月	1998年9月
	Sep. 1998
発行者	日本経営財務研究学会
	Japan Finance Association
ISBN	4-502-34613-6 C3334

JFA 日本経営財務研究学会

第5章　柔軟性を持つ投資プロジェクトに対する不完備市場下での最適戦略

今井潤一

要　　旨：本論では，柔軟性を持つ投資プロジェクトから生まれるキャッシュフローを，この投資プロジェクトの原資産市場でのポートフォリオ戦略によって制御する方法を提案し，この戦略が有効であることを示す。さらに，原資産市場が不完備である場合を想定し，企業の効用関数を想定することによって，ポートフォリオ戦略を考慮に入れた投資プロジェクトの評価モデルを構築し，これが動的計画法を利用して解けることを明らかにする。

キーワード：柔軟性，投資プロジェクト，不完備市場，ポートフォリオ戦略，動的計画法

1．問題の所在

企業価値の増大を目的として，企業は様々な活動を行うために投資する。その中で多額の資本を投下して行う，特定の目標のための一連の活動をここでは投資プロジェクトと呼ぶ。つまり，大量の資本が必要で，資本予算の対象となる諸活動が，ここでいう投資プロジェクトである。投資プロジェクトの計画に当たって考慮に入れる期間は，短くて数年，長いときには，10年から20年，さらにそれを超えることもある。そのため，投資プロジェクトの評価に当たって，起こりうる不確実性をリスクと認識し，そのリスクをいかに制御するかが

1997年3月28日受理

問題になる。

企業が行う投資プロジェクトがさらされているリスクには，様々なものがある。中には，企業努力によってある程度制御できるものもあるが，企業が全く制御できないリスクも存在する。例えば，原油の採掘プロジェクトにおいて，その原油の市場価格は一つの企業が制御できるものではない。また，海外に製品の輸出を行っている企業は，為替レートの変動を制御することはできない。このように多くの投資プロジェクトは，商品価格の変動や為替レートの変動のように，市場で売買されている原資産の価格変動のリスクにさらされており，一般にその原資産の価格変動を直接制御することはできない。このようなリスクに対し，企業はプロジェクトの開始時点の延期や生産水準を変更といったマネジメントの柔軟性を行使することによって，プロジェクトの価値をより高いものにすることができる。また，この企業は投資プロジェクトの原資産市場や先物市場を利用して，投資プロジェクトから生まれるキャッシュフローを制御することもできる。

本論では，実物投資プロジェクトの価値に影響を与えるリスクの源泉である原資産が市場で売買されている場合を想定し，投資プロジェクトにおけるマネジメントの柔軟性の行使戦略と，原資産市場でのポートフォリオ戦略とを組み合わせることにより，投資プロジェクトの価値を最大化する問題をモデル化し，この問題が動的計画法によって解けることを明らかにする。

本論文の目的は次の二点である。第一は，投資プロジェクトの原資産市場での売買を利用して，柔軟性を持つ実物投資プロジェクトから生まれるキャッシュフローを制御する戦略を提案し，この戦略が有効であることを示すことである。第二は，投資プロジェクトの原資産市場が不完備である場合に，企業の効用関数を想定することによって，このポートフォリオ戦略を考慮に入れた投資プロジェクトの評価モデルを構築し，これが動的計画法を利用して解けることを明示することである。

本論で扱う問題の所在を明確にするために，以下で本研究とこれまでの他の

研究との違いを明らかにする。最初に，オプション評価理論を利用したリアルオプションの評価法との違いを述べる。オプション評価理論を利用したリアルオプションの評価法とは，実物投資プロジェクトにおいて，マネジメントの持つ将来の柔軟性を，一種のオプション(リアルオプション)とみなし，このリアルオプションの価値を金融の世界のオプション評価理論を援用して評価しようとする方法である(1)。この方法は，従来，合理的な投資プロジェクトの評価法として提案されていた正味現在価値法(Net Present Value Method)が，マネジメントの柔軟性を評価にうまく取り入れられないことから，その問題を解決する手法として近年になって提案されたものである（Mason and Merton [1985], Brennan and Schwartz [1985], McDonald and Siegel [1985], Ekern [1988], Pindyck[1988], Dixit [1989], Triantis and Hodder [1990], Ingersoll and Ross [1992], Kulatilaka [1993])。しかし，オプション評価法を利用して投資プロジェクトの評価を試みている研究はすべて，柔軟性を含んだ投資プロジェクトの評価に焦点を当て，ポートフォリオ戦略によるキャッシュフローの制御という考え方は，これまでのところ提案されていない。本論では，投資プロジェクトにポートフォリオ戦略を加えて評価することを提案し，ポートフォリオ戦略を組み合わせることにより，企業の効用をより高めることができることを示す。

本論で提案するモデルが，従来のオプション評価理論を利用したリアルオプション評価法と異なるもう一つの点は，原資産市場の不完備性を考慮した点である。これまでの研究では，リアルオプションの原資産市場が完備であることが暗黙に仮定されていた。しかし，現実の実物投資プロジェクトの原資産市場は，金融市場とは異なり不完備であることが多い。したがって，投資プロジェクトの柔軟性を評価する場合にも，この原資産市場の不完備性を考慮してモデルを構築する必要がある。ところが，原資産市場が不完備である場合には，いわゆる無裁定条件を利用したオプション評価理論を援用することによってリアルオプションを評価することができない。そこで本論では，企業の効用関数を

想定することにより，市場の完備性に関わらず，投資プロジェクトの評価が可能となるモデルを構築する。

次に，従来の実物投資に対するヘッジの議論との違いを考える。実物投資プロジェクトに対し，原資産市場，あるいはその先物市場を利用したリスクのヘッジ手法についても様々な議論がなされている。本研究でも，原資産市場での売買を利用して投資プロジェクトから生まれるキャッシュフローを制御する方法を提案していることから，この分野の研究の一つとして解釈することも可能である。しかし，実物投資のヘッジについてのこれまでの研究のほとんどは，短期的なリスクのヘッジに関する議論に焦点を当てている。例えば，国内で生産した製品を輸出によって海外で販売する企業において，先物為替予約を何単位結ぶかといったことが議論されている。つまり，これまでのヘッジに関する議論は，投資プロジェクトに含まれる活動の一部に対するヘッジ方法に過ぎず，将来にこの企業が海外に生産拠点を移動するといった，マネジメントの柔軟性を考慮したうえでのヘッジ戦略を考えることは想定されていない。

投資プロジェクトに柔軟性が含まれていないときには，その投資から生まれるキャッシュフローを制御するために，先物を購入してそれを保有するといった一時点での取引（バイ・アンド・ホールド戦略）をすれば十分である。つまり，投資プロジェクトの開始時点で何単位の取引を行えばよいかという議論のみが必要で，その後の原資産価格の変動に応じてどのように取引を行っていくかというダイナミックな戦略についての議論を行う必要がない。

ところが，本論で取り扱う柔軟性を含んだ投資プロジェクトから生まれるキャッシュフローは，この柔軟性がリアルオプションと呼ばれることからも明らかなように，原資産価格変動の履歴に依存する複雑なものである。このキャッシュフローを制御するためには，バイ・アンド・ホールド戦略のみでは不十分で，プロジェクトの期間中に，原資産価格の変動に応じてポートフォリオを組み替えるダイナミックなポートフォリオ戦略を考慮する必要がある。つまり，投資プロジェクト自身が原資産価格の変動に応じて，柔軟性をダイナミックに

行使することを想定しているため，その投資プロジェクトから生まれるキャッシュフローを制御するためには，ポートフォリオ戦略もまたダイナミックなものでなければならないのである。そこで本論では，投資プロジェクトの原資産と無危険資産を組み合わせたポートフォリオを作成し，それをダイナミックに組み替えるポートフォリオ戦略によって，柔軟性を含んだ投資プロジェクトから生まれるキャッシュフローの制御を行う方法を提案する。

最後に，金融オプションに対するヘッジ戦略との違いを述べる。実物投資の世界と異なり，金融の世界では既にオプションに代表される複雑なペイオフを持つ派生証券を，原資産の連続的な取引によってヘッジするダイナミックなポートフォリオ戦略が議論されている。しかし，金融オプションのポートフォリオ戦略と実物投資プロジェクトのポートフォリオ戦略とでは，その意味するところが基本的に異なる。

オプションから生まれるキャッシュフローを，完全に相殺する完全ヘッジ戦略について考えてみよう。金融の世界で，一般の投資家がオプションに対して完全ヘッジ戦略を採ることはほとんどない。なぜなら，オプションを購入するにはプレミアムが必要なためである。オプションの価格が公正な価格よりも安い価格で取引されていれば，オプションを購入し，同時に完全ヘッジ戦略を採ることによって裁定利益を得ることができるが，オプションが公正な価格で取引されていれば，オプションを購入して，同時に完全ヘッジ戦略を採ることは，はじめから何一つ購入しないのと同じで全く意味がない。つまり，金融の世界における完全ヘッジ戦略は，オプションの公正な価格を求めるために仮想的に考えられるもので，一般の投資家がこの戦略を実際に利用することはほとんどない。

ところが，実物世界の投資において，柔軟性を含んだ投資プロジェクトに対して完全ヘッジ戦略を採ることは重要な意義を持つ。リアルオプションと呼ばれる投資プロジェクトの柔軟性は，投資プロジェクトがもつ，参入，拡張，縮小，撤退といったマネジメントがもつ将来の可能性のことを意味している。こ

のようなマネジメントの可能性は，経営者が認識するかどうかが問題であって，その取得にはプレミアムがかからない。したがって，投資プロジェクトの柔軟性であるリアルオプションに対して完全ヘッジ戦略を採ると，このオプションのプレミアムに相当する価値が固定できる。すなわち，原資産の価格変動のリスクが完全に除去され，投資プロジェクトから生まれる収益が確定できるのである。

例として，製品の輸出を行うプロジェクトを考える。このプロジェクトは，為替変動のリスクにのみにさらされているとし，これに対して生産拠点を海外に変更するというマネジメントの柔軟性，すなわちリアルオプションを持っているとする。マネジメントの柔軟性の有無に関わらず，このプロジェクトは常に為替のリスクにさらされている。したがって，この投資プロジェクトが成功するかどうかは，その後の為替レートの変動に大きく依存している。ところが，ここで為替レートに関して完全ヘッジ戦略をとり，最適な時点でこの柔軟性を行使（生産拠点を海外へ移転）するとすると，このリアルオプションのプレミアムに相当する価値を，その後の為替レートの変動に関わらず固定することができる。このように，原資産の変動リスクを完全に除去できる完全ヘッジ戦略は，原資産市場が完備で完全ヘッジ戦略が可能であれば，企業が実際に採りうる有効なポートフォリオ戦略の一つであるといえる。

もちろん，プロジェクトには，原資産の価格変動以外にも事業リスクが存在しているはずである。しかし，プロジェクトにおけるその他のリスクはある程度制御が可能であるのに対し，一般に原資産の価格変動リスクは，それ自体制御できないことが多い。したがって，本論で提案するポートフォリオ戦略は，この制御できない原材料の価格変動リスクを制御する方法として非常に有効である。

不完備市場におけるオプションの評価をする場合にも，金融オプションとリアルオプションでは，異なった評価方法を用いる必要がある。原資産市場が不完備である場合の金融オプションの評価の問題は，既にいくつかの研究が存在

する（Karatzas, Lehoczky, Shreves and G. Xu [1991], Karoui and Quenez[1995]）。その中でPages [1987] は，投資家の効用関数を想定し，複製ポートフォリオの代わりに，オプションと同じ選好を持つポートフォリオを想定した。そして，そのポートフォリオの現在時点での価値が，オプションの適正価格であるとした。この方法は，完備市場におけるオプション評価の自然な拡張であり，不完備市場におけるオプションの公正価格を評価する一つの方法である。

しかし，Pagesの評価法を実物投資プロジェクトの評価に適用するには問題点がある。仮に，不完備市場において，既存の証券で複製できない新しい派生証券を既に保有している投資家がいるとする。この新しい派生証券は，特殊な証券で，それ自体を売買できないとする。このとき，彼にとって興味があるのは，この特殊な派生証券の公正な市場価格ではなく，むしろこの派生証券と既存の証券市場を組み合わせて，自らの効用をいかに高めることができるかである。原資産が市場で売買されている実物投資プロジェクトを持つ企業は，まさに上記のような問題に直面していると考えられる。すなわち，企業が直面している問題は，その企業固有の投資プロジェクトに含まれるリアルオプションの行使戦略と原資産市場でのポートフォリオ戦略を組み合わせることによって，自らの効用をいかに増大させるかという問題である。市場で売買されるときの公正価格が問題となる金融オプションと，特定の企業が持つ，市場では売買されることのないリアルオプションとは，上記の点で直面している問題が基本的に異なるため，それらを評価するためには異なった評価法を用いなければならない。

本論文の構成は，以下の通りである。続く第2節において，柔軟性をもつ投資プロジェクトの評価を，原資産市場でのポートフォリオ戦略を組み合わせて評価するモデルを構築し，この問題が動的計画法によって解けることを明らかにする。第3節では，企業の効用関数として現在価値を用いることの利点を述べ，それを数値例によって確認する。最後に第4節において結論を述べる。

2．モデル

（1） 状況設定

以下では，実物投資プロジェクトの原資産が市場で売買される場合を想定する。最初に，その原資産の価格過程を定義する。投資プロジェクトの計画期間を時点0から時点Tまでとし，現在を時点0とする。そして，プロジェクトの意思決定や市場での取引は，離散時点$t = 0, \cdots, T$で行うことができるものとする。確率空間を$(\Omega, \mathcal{F}, P)$とおく。このとき，各時点で生じる状態はk_t個とし，それぞれ$Z_t=\{1, \cdots, k_t\}$とおく。よって，標本空間は，$\Omega=Z_0 \times Z_1 \times \cdots \times Z_T$とおける。ただし，時点0での状態は観測可能であるから，$Z_0=\{1\}$とする。

プロジェクトに影響を与える原資産価格のプロセス$\{S_t\}_{t=0}^{T}$は，マルコフ過程であるとする。すなわち，$S_t=S_t(i);i \in Z_t$が成立するとする。ここで，S_tを$M+1$次元ベクトルとし，$S_t=(S_t^0, \cdots, S_t^M)$とする。$S_t^m;m=0, \cdots, M$は，資産$m$の市場価格をあらわす。ただし，資産$m = 0$は無危険資産を表し，1期間あたりの無危険利子率を$r-1$とし，期間を通じて一定であると仮定する。時点$t$における資産価格が$S_t(i)$のとき，次の時点で状態$j \in Z_{t+1}$に移る確率を$P_t(i, j)$とおく。

次に，投資プロジェクトの原資産を売買する投資戦略を定義する。任意の時点tでの資産mの保有量をN_t^m，とおくと，時点tでの資産全体のポートフォリオは，$N_t=(N_t^0, \cdots, N_t^M)$と表せる。このとき，利用可能な情報の制約から，戦略$\{N_t\}_{t=0}^{T}$は$\{\mathcal{F}_t\}_{t=0}^{T}$－適合でなければならない。ここで，ポートフォリオ戦略$N=(N_0, \cdots, N_T)$を，次の式を満たす戦略と定義し，この戦略の集合をΘとおく。

$$N_{-1} \equiv 0, \tag{1}$$

$$N_T \equiv 0, \tag{2}$$

すなわち，ポートフォリオ戦略とは，時点ゼロでポートフォリオの手持ち無しから開始して，最終的に満期時点ですべてのポートフォリオを清算する戦略を意味する。ポートフォリオ戦略$N \in \Theta$に関して，時点tでのポートフォリオ

の組み替え時に生まれるキャッシュフローを$CF_t^F(N)$とおくと，

$$CF_t^F(N)=S_t\cdot(N_{t-1}-N_t), \tag{3}$$

と表せる。ただし，$A\cdot B$はAとBの内積を表し，$CF_t^F>0$は資金の流入を表す。定義より，ポートフォリオ戦略から生まれるキャッシュフローのプロセス$CF^F=\{CF_t^F(N)\}_{t=0}^T$は，$\{\mathcal{F}_t\}_{t=0}^T$－適合である。以下では，原資産市場$\{S_t\}_{t=0}^T$に裁定機会は存在しないと仮定する。ここで裁定機会とは，ポートフォリオ戦略の組み替え時に生まれるキャッシュフローが，任意の時点で非負であり，かつキャッシュフローが正となる事象が存在することである。すなわち，

$$CF^F\geq 0 \text{ and } CF^F\neq 0, \tag{4}$$

が成り立つことである。

次に，実物投資のプロジェクトについて定義する。一般に，投資プロジェクトには，参入，撤退など，マネジメントが将来に持つ柔軟性が複数ある可能性があるが，本論では柔軟性が一つである場合についてモデル化をおこなう。柔軟性が複数ある場合にも，本論で提案するモデルを拡張することにより，容易にモデル化が可能である。

投資プロジェクトがマネジメントの将来の柔軟性を含んでいるときには，どの時点でその柔軟性を行使するかによって，このプロジェクトから生まれるキャッシュフロー体系は異なってくる。時点において，柔軟性の行使前に実物投資から生まれるキャッシュフローを$CF_t^{R_0}=CF_t^{R_0}(i);i\in Z_t$，柔軟性の行使後に生まれるキャッシュフローを$CF_t^{R_1}=CF_t^{R_1}(i);i\in Z_t$とおき，それぞれのキャッシュフローのプロセス$CF^{R_0}=\{CF_t^{R_0}\}_{t=0}^T$，$CF^{R_1}=\{CF_t^{R_1}\}_{t=0}^T$はマルコフ過程であるとする。そして，柔軟性を行使するために必要な投資額をIとおく。

柔軟性を行使する時点，つまり停止時をτとおき，その集合を$\mathcal{T}$とおく。つまり，実物投資プロジェクトにおいて，企業はもっとも有利な時点τで，キャッシュフロー体系を$\{CF_t^{R_0}\}_{t=0}^T$から$\{CF_t^{R_1}\}_{t=0}^T$へ，コストIを支払うことによって転換させることができるものとする。

一般に，企業が一時期に支払うことのできるキャッシュフローには，限界が

あると考えられる。そこで，1時点で，企業が支払うことのできるキャッシュフローの最大値，すなわち許容最大キャッシュ·アウトフローをCF_{max}とする。つまり，どんなに収益性の高いプロジェクトでも，そのプロジェクトの途中で，CF_{max}より大きな支払いが生まれるようなプロジェクトを企業は手がけることができないとする。

（2） 完備市場での完全ヘッジ戦略

柔軟性を持つ投資プロジェクトから生まれるキャッシュフローをポートフォリオ戦略によって制御することの有効性を示すため，最初に原資産市場が完備であるときの完全ヘッジ戦略をモデル化する。原資産市場が完備であり，かつ裁定機会が存在しない場合には，確率測度Pと等価なマルチンゲール測度$\tilde{P}$が一意に存在し，実物投資プロジェクトの価値が確率測度$\tilde{P}$のもとでの期待値として評価できることが知られている(Harrison and Pliska[1981])。したがって，この場合には実物投資プロジェクトの柔軟性の最適行使時点τ^*が，オプション評価理論を用いて，容易に求められる。そこで，柔軟性を最適に行使したときに，実物投資プロジェクトから生まれるキャッシュフローを$CF^{R^*}=\{CF_t^{R^*}\}_{t=0}^{T}$とおくと，このときの投資プロジェクトをオプション評価理論によって評価したときの価値$\tilde{V}$は，

$$\tilde{V}=\sum_{t=0}^{T}\tilde{E}\left[\frac{1}{r^t}CF_t^{R^*}\middle|\mathcal{F}_0\right], \tag{5}$$

である。ただし，$\tilde{E}[\cdot]$は確率測度$\tilde{P}$のもとでの期待値を表すものとする。ここで，$\tilde{V}\leq 0$ならば，この実物投資プロジェクトは棄却される。以下では，プロジェクトの実行が有利で，$\tilde{V}>0$と仮定する。

定義により，ポートフォリオ戦略$N\in\Theta$は手持ちゼロから開始されることから，任意のポートフォリオ戦略から生まれるキャッシュフローをオプション評価理論によって評価したときの価値はゼロとなるはずである。したがって，次の式が成立する。

$$\sum_{t=0}^{T}\tilde{E}\left[\frac{1}{r^t}CF_t^F(N)\middle|\mathcal{F}_0\right]=0. \tag{6}$$

実物投資プロジェクトから生まれるキャッシュフローと，ポートフォリオN戦略から生まれるキャッシュフローの合計を$CF=\{CF_t\}_{t=0}^{T}$とおく。このとき，このキャッシュフローをCF評価すると，

$$\begin{aligned}\sum_{t=0}^{T}\tilde{E}\left[\frac{1}{r^t}CF_t\middle|\mathcal{F}_0\right]&=\sum_{t=0}^{T}\tilde{E}\left[\frac{1}{r^t}\left\{CF_t^{R*}+CF_t^F\right\}\middle|\mathcal{F}_0\right]\\&=\sum_{t=0}^{T}\tilde{E}\left[\frac{1}{r^t}CF_t^{R*}\middle|\mathcal{F}_0\right]+\sum_{t=0}^{T}\tilde{E}\left[\frac{1}{r^t}CF_t^F\middle|\mathcal{F}_0\right]\\&=\tilde{V},\end{aligned} \tag{7}$$

となる。(6)，(7)より，任意のポートフォリオ戦略はキャッシュフローCFを変化させるが，オプション評価理論による評価価値には影響しないことがわかる。

次に，完全ヘッジ戦略$\hat{N}$を次の式を満たすポートフォリオ戦略と定義する。

$$CF_t^F(\hat{N})+CF_t^{R*}=0;t=1,\cdots,T. \tag{8}$$

仮定より原資産市場が完備であることから，完全ヘッジ戦略は唯一存在する。このとき，時点0でのキャッシュフローの合計CF_0は，

$$\begin{aligned}CF_0&=\sum_{t=0}^{T}\tilde{E}\left[\frac{1}{r^t}\left\{CF_t^{R*}+CF_t^F(\hat{N})\right\}\middle|\mathcal{F}_0\right]=\sum_{t=1}^{T}\tilde{E}\left[\frac{1}{r^t}\left\{CF_t^{R*}+CF_t^F(\hat{N})\right\}\middle|\mathcal{F}_0\right]\\&=\tilde{V}-0\\&=\tilde{V},\end{aligned} \tag{9}$$

である。以上から，企業が実物投資戦略に関して最適な行使戦略を採り，同時に原資産市場において完全ヘッジ戦略を採った場合には，その後の原資産価格の変動に関わらず，評価価値$\tilde{V}$の収益を固定することができる。企業にとって，制御できない原資産価格の変動に影響せず，収益を固定できることの意義は非常に大きいと考えられる。

また，ポートフォリオ戦略を考えない場合には，このプロジェクトがいかに

魅力的なプロジェクトであっても，ある時点tにおいて，この実物投資プロジェクトの途中にCF_t^{max}以上の資金流出がある場合には，このプロジェクトを推進することができない。しかし，原資産市場でポートフォリオ戦略を採ることにより，このプロジェクトが実行可能となる。このことも，ポートフォリオ戦略の有効性を示している。

原資産市場が完備である場合にも，企業が実物投資プロジェクトをヘッジする場合には，完全ヘッジ戦略がもっとも優れた戦略であるとは限らない。企業によっては，完全にプロジェクトの価値を固定するよりも，リスクをとって期待収益を高めたいと考える可能性もある。このようなことをモデルで考慮するため，次項においては企業の効用関数を想定し，効用を最大化するポートフォリオ戦略を求める問題としてモデル化する。

（3） 不完備市場での企業の効用最大化問題

リアルオプションの原資産市場は，一般の金融市場と異なり，不完備である場合が多いと考えられる。したがって，原資産市場としてより現実味の高い不完備市場において実物投資プロジェクトの行使戦略と原資産市場でのポートフォリオ戦略を考える必要がある。ところが，不完備市場においては，一般に，等価マルチンゲール測度が一意に決定しない。そのため，等価マルチンゲール測度を用いて，実物投資における柔軟性の最適行使戦略を明らかにできない。つまり，不完備市場においては，無裁定条件を利用したオプション評価理論が適用できない。そこで本項では，企業の効用関数を想定し，この効用関数を最大化する投資プロジェクトの最適行使戦略と原資産市場での最適ポートフォリオ戦略を求める問題として定式化し，この方法が，市場の完備性に関わらず利用できることを示す。

まず，$u_t:(t=0,\cdots,T)$を$[-CF_{max},\infty)$で定義された狭義単調増加な関数とする。そして，効用関数として以下のような加法的な関数を考える。

$$U(CF)=E\Big[\sum_{t=0}^{T}u_t(CF_t)\Big|\mathcal{F}_0\Big]. \tag{10}$$

つまり，効用関数は，すべての時点の，実物投資から生まれるキャッシュフローと，ポートフォリオ戦略から生まれるキャッシュフローの合計の関数であるとする(2)。

企業は，実物投資におけるマネジメントの柔軟性の行使時点と，原資産市場でのポートフォリオ戦略をそれぞれ選択することにより，効用関数を最大化することができる。以上から，企業の効用最大化問題は次のように定式化できる。

$$\underset{(\tau,N)\in\mathcal{T}\times\Theta}{\text{maximize}}\ U(CF),$$
$$\text{subject to}\ {}^{\forall}t\le T,\ CF_t\ge -CF_{\max}.$$

この問題の最大値を$U_{\max}$とおく。関数$u_t:(t=0,\cdots,T)$はプロジェクトを行う企業のリスクとリターンに対する態度を表している。リスク回避の程度の違いは，u_tの関数形やそのパラメータの値によって調整される。$CF_{\max}$許容最大キャッシュ·アウトフローとして定義したが，原資産市場のポートフォリオ戦略をリスクのヘッジのために利用する企業は，$CF_{\max}$をリスクヘッジの水準として調整することにより，その主たる目的を達成できる。

本論では，上記の問題の最適解を動的計画法を用いて求める。値関数$V_t(i,w,1)$を，時点tでの状態が$i(\in Z_t)$，手持ち資金がwであるときの，実物投資プロジェクトのマネジメントの柔軟性を既に行使したという条件の下での効用の最大値を表すとする。

(i)　満期時点T

$$V_T(i,w,1)=\begin{cases} u_T\big(w+CF_T^{R_1}(i)\big) & if\ w+CF_T^{R_1}(i)\ge -C_{\max},\\ -\infty & if\ w+CF_T^{R_1}(i)<-C_{\max}\end{cases} \tag{11}$$

(ii) 時点 t≤$T-1$

$$V_t(i,w,1)=\max_{cf,\,N}\left\{u_t(cf)+\sum_{j=1}^{k_{t+1}}P_t(i,j)V_{t+1}(j,\,W_{t+1}^{N}(j),\,1)\right\}, \tag{12}$$

$$\text{subject to} \qquad cf\geq -CF_{max},\ N\in\Re^{M+1}, \tag{13}$$

$$cf+(N\cdot S_t(i))=w+CF_t^{R_1}(i). \tag{14}$$

ただし，$W_{t+1}^{N}(j)\equiv(N\cdot S_{t+1}(j))$ とする。(13)は，時点 t でのキャッシュフローが，企業の支払い能力以内でなければならないことを表している。また，(14)は，この時点における資金の流入と資金の流出が等しくなる，つまり，自己充足性が満たされなければならないことを表している。実物投資プロジェクトにおけるマネジメントの柔軟性は，既に行使されているため，この場合には実物投資プロジェクトには柔軟性は存在しない。

実物投資プロジェクトのマネジメントの柔軟性を，まだ行使していないときの効用の最大値 $V_t(i,w,0)$ も同様の方法で定義できる。ただし，マネジメントの柔軟性は，まだ行使されていないため，この柔軟性を含めて考える必要がある。そこでまず，$V_t^0(i,w,0)$，$V_t^1(i,w,0)$ を以下のように定義する。

$V_t^0(i,w,0)$は，時点において柔軟性を行使しなかった場合の価値を，$V_t^1(i,w,0)$ は，コスト I を支払って，時点 t に柔軟性を行使した場合の価値を表すとすると，$V_t^0(i,w,0)$，$V_t^1(i,w,0)$ は，

(i) 満期時点 T

$$V_T^0(i,w,0)=\begin{cases}u_T\left(w+CF_T^{R_0}\right) & if\ w+CF_T^{R_0}(i)\geq -C_{max},\\ -\infty & if\ w+CF_T^{R_0}(i)<-C_{max}\end{cases} \tag{15}$$

$$V_T^1(i,w,0)=\begin{cases}u_T\left(w+CF_T^{R_1}-I\right) & if\ w+CF_T^{R_1}(i)-I\geq -C_{max}.\\ -\infty & if\ w+CF_T^{R_1}(i)-I<-C_{max}\end{cases} \tag{16}$$

(ii) 時点 $t \leqq T-1$

$$V_t^0(i,w,0)=\max_{cf,\,N}\left\{u_t(cf)+\sum_{j=1}^{k_{t+1}}P_t(i,j)V_{t+1}(j,\,W_{t+1}^N(j),\,0)\right\}, \tag{17}$$

subject to　　$cf \geq -CF_{max},\ N\in \Re^{M+1}$, (18)

$$cf+(N\cdot S_t(i))=w+CF_t^{R_0}(i). \tag{19}$$

$$V_t^1(i,w,0)=\max_{cf,\,N}\left\{u_t(cf)+\sum_{j=1}^{k_{t+1}}P_t(i,j)V_{t+1}(j,\,W_{t+1}^N(j),\,1)\right\}, \tag{20}$$

subject to　　$cf \geq -CF_{max},\ N\in \Re^{M+1}$, (21)

$$cf+(N\cdot S_t(i))=w+CF_t^{R_1}(i)-I. \tag{22}$$

で表される。企業は $V_t^0(i,w,0)$，$V_t^1(i,w,0)$の2つの選択肢のうちで，有利な方を選ぶことができることから，

$$V_t(i,w,0)=\max\left\{V_t^0(i,w,0),\,V_t^1(i,w,0)\right\}, \tag{23}$$

が成り立つ。以上を帰納的に計算することにより，時点0において，初期資産ゼロから開始した場合のプロジェクトの柔軟性の行使前の効用の最大値 $V_0(1,0,0)$ が求められる。ここで，動的計画問題の最適性の原理より，$U_{max}=V_0(1,0,0)$ が成立する。

以上から，動的計画法を用いて，市場の完備性に関わらず，企業の効用関数の最大値が求められることが示された。各時点での $V_t^0(i,w,0)$，$V_t^1(i,w,0)$ の大小関係をみることにより，実物投資プロジェクトの柔軟性の最適行使戦略が同時に求められる。また，最適解 N をみることにより最適ポートフォリオ戦略が求められる。ここで，任意の時点 t において，

$$V_t^0(i,w,0)>V_t^1(i,w,0), \tag{24}$$

が成立するならば，企業はこの実物投資プロジェクトを採用しない。

このプロジェクトが実際に意味を持つのは，値関数が $V_t(i,w,1)>-\infty$ となる w の範囲である。そこで，次に，$V_t(i,w,1)>-\infty$ となる w の実効範囲を調べる。満期時点 T の状態が i のときの実効範囲は，定義より，

$$\left(w_T(i,1),\infty\right),\ \text{ただし}\ w_T(i,1)\equiv-\left\{C_{\max}+CF_T^{R_1}(i)\right\},\tag{25}$$

である。次に，時点 t (t=0,…,T-1)における実効範囲を求める。時点 t+1 で状態が j のときの実効範囲を $[w_{t+1}(j,1),\infty)$ (ただし，$w_{t+1}(j,1)>-\infty$) とする。このとき，$V_t(i,w,1)>-\infty$ となるためには，次の二つの条件が成立しなければならない。

① $p(i,j)>0$ であるすべての j について，$W_{t+1}^N(j)\equiv(N\cdot S_{t+1}(j))\geq w_{t+1}(j,1)$ が成立する。

② $w\geq(N\cdot S_t(j))-CF_t^{R_1}(i)-CF_{max}$ が成立する。

以上から，問題

$$\underset{N\in\Re^{M+1}}{\text{minimize}}\ (N\cdot S_t(i))-CF_t^{R_1}(i)-CF_{max},$$

$$\text{subject to}\ (N\cdot S_{t+1}(j))\geq w_{t+1}(j,1).$$

の最小値が $w_t(i,1)$ となる。上記の問題は線形計画問題であり，これを解くことにより，時点での実効範囲が求められる。任意の状態について，$S_t(i)>0$ であり，また制約条件から，ポートフォリオ N は下に有界であることから，最適解が必ず存在する。$V_t(i,w,0)>-\infty$ を満たす w の実効範囲についても，同様にして求めることができる。以上から，時点0において，十分大きな手持ち資金 w から開始すれば，$U_{max}>-\infty$ なる行使戦略とポートフォリオ戦略が存在する。ただし，本モデルでは，$CF_t^{R_0}$, $CF_t^{R_1}<0$ である可能性があるため，手持ち資金0から開始した場合に，$U_{max}>-\infty$ となる戦略が存在するかどうかは明らかではない。$U_{max}=-\infty$ はこの実物投資プロジェクトを採用しないことを意味する。

3．効用関数の想定とその数値例

一般に，投資家の最適消費問題（Merton[1971], Huang and Litzenber-

ger[1988], Duffie[1993]）を考えるときには，投資家の効用関数を想定して問題を定式化することが多い。本論でも，企業の効用関数を想定し，それを最大化する問題として定式化する。しかし，実際の投資プロジェクトに適用することを考える場合には，企業の効用関数としてどのような効用関数を想定するかという困難な問題に直面する。個人が持つ効用関数がどのような形を持つかという議論は数多くされているが，当然のことながら結論はでていない。

そこで本論では，効用関数として，実物投資プロジェクトから生まれるキャッシュフローと，それを制御するポートフォリオ戦略から生まれるキャッシュフローの合計の現在価値（NPV）を採り上げる。効用関数としてキャッシュフローのNPVを考える最も大きな利点は，NPVが企業目的に対して整合的であることである。NPV法は，これまで投資プロジェクトの評価を行うための標準的な方法として利用されてきている。効用関数としてキャッシュフローの現在価値を利用することは，従来の評価基準をそのまま利用できる利点がある。もちろん，すべての人が納得する企業の効用関数が設定できれば，そちらを利用するほうがよいことは明らかであるが，そうでない場合には，現在価値は多くの人に受け入れられる指標であると考えられる。

また，本論で提案するポートフォリオ戦略を，実物投資プロジェクトに対するヘッジ戦略であるという観点からみた場合には，前節でも述べたように，許容最大キャッシュ·アウトフローCF_{max}を企業が求める最低限のリスクヘッジ水準と捉えることができる。したがって，効用関数として現在価値を採用した問題は，企業が求めるリスクヘッジの条件を満たすポートフォリオ戦略の中で，その現在価値が最も大きくなる戦略を選ぶ問題と解釈することができる。

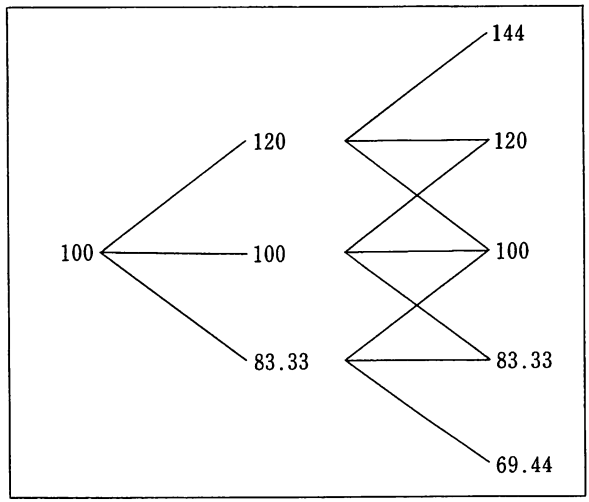
効用関数として現在価値を想定するときには，上で述べた理由に加えて，技術的な利点も存在する。効用関数として現在価値を利用すると，本論で設定する動的計画問題がパラメータを持った線形計画問題となり，パラメトリック線形計画法を利用して簡単に解くことができるため実用性が高い。そこで本節では，具体例によってこの利点を明らかにする。

$u_t(c)=\frac{c}{R^t}$ とおくと効用関数は，

$$U(CF)=E\Big[\sum_{t=0}^{T}\frac{CF_t}{R^t}\Big|\mathcal{F}_0\Big], \tag{26}$$

となる。ただし$R-1$は，割引率を表すものとする。ある1つの原材料を使って製品を作る工場の建設を考える。プロジェクトの計画期間を2期間とする。原材料の価格は，図5－1のような三項過程にしたがうとする。三項過程を用いるのは，最も簡単な不完備市場となるからである。各時点の原材料価格の推移確率は，すべて1/3とする。

図5－1：原材料価格の変動過程



（注）　初期株価100，株価の1期間あたりの上昇率1.2，1期間あたりの下降率1/1.2，無危険利子率0。

工場を建設するための初期投資額は$I=20$とし，いったん工場を建設するとすぐに操業が開始されるものとする。操業している場合，各期間でプロジェクトから生まれるキャッシュフローは，$CF_t^{R_1}(S_t)=100-S_t$であるとする。また，操業していない場合は，$CF_t^{R_0}\equiv 0$とする。そして，いかなる場合にも，時点2

においてこの工場の操業を終了しなければならないと仮定する。無危険利子率 $r-1$，割引率 $R-1$ は簡単のため0とする。企業が許容する最大キャッシュ・アウトフローは $CF_{max}=0$，とおく。つまり数値例では，企業はまったく赤字を許容しないものとする。これは完全にリスクがヘッジされていることを意味している。

効用関数を現在価値にすることの技術的な利点を明示するため，以下に $V_t(i,w,1)$ の計算プロセスを示す。まず，実効範囲を求める。それには，次の線形計画問題を解けばよい。

$$\begin{aligned}
&\text{minimize } 120N_1+N_0+20,\\
&\text{subject to } 144N_1+N_0\geq 44,\\
&\qquad\qquad 120N_1+N_0\geq 20,\\
&\qquad\qquad 100N_1+N_0\geq 0.
\end{aligned}$$

上の線形計画問題の最小値を求めると40となる。したがって，実効範囲は，$[40,\infty)$ である。続いて，この実効範囲での $V_t(i,w,1)$ を求める。

問題 (P)

$$V_1(S_1=120,w,1)=\max_{cf,N_0,N_1}\left[\begin{array}{l} cf+\frac{1}{3}\{V_2(S_2=144,144N_1+N_0-44)\\ \qquad +V_2(S_2=120,120N_1+N_0-20)\\ \qquad +V_2(S_2=100,100N_1+N_0)\end{array}\right]$$

$$=\max_{cf,N_0,N_1}\left\{cf+\frac{364}{3}N_1+N_0-\frac{64}{3}\right\},$$

$$\begin{aligned}
\text{subject to}\quad & cf+120N_1+N_0=w-20,\\
& 144N_1+N_0\geq 44,\\
& 120N_1+N_0\geq 20,\\
& 100N_1+N_0\geq 0,\\
& cf\geq 0.
\end{aligned}$$

ただし，$V_1(S_1=120,w,1)$ は，時点1における原材料価格が $S_1=120$ であるときの値関数を表すものとする。

この問題は，パラメータ w を含んだ線形計画問題である。これをパラメトリック線形計画法を利用して解く。最初にスラック変数を追加して，この問題を標準形に直す。

問題(P')

$$\max \left\{cf-\frac{364}{3}(N_1'-N_1'')+(N_0'-N_0'')-\frac{64}{3}\right\},$$

$$\begin{aligned}
\text{subject to}\quad & cf+120(N_1'-N_1'')+(N_0'-N_0'')=w-20,\\
& 144(N_1'-N_1'')+(N_0'-N_0'')-x_1=44,\\
& 120(N_1'-N_1'')+(N_0'-N_0'')-x_2=20,\\
& 100(N_1'-N_1'')+(N_0'-N_0'')-x_3=0,\\
& cf, N_0', N_0'', N_1', N_1'', x_1, x_2, x_3\geq 0.
\end{aligned}$$

ここで，N_0', N_1', x_1, x_2 を基底にとって問題を書き直すと，

問題(P'')

$$\max -\frac{1}{15}cf-\frac{1}{15}x_3+\frac{16}{15}w-\frac{128}{3},$$

$$\begin{aligned}
\text{subject to}\quad & N_1'=N_1''+\frac{1}{20}\{w-20-cf-x_3\},\\
& N_0'=N_0''-5w+100+5cf+6x_3\\
& x_1=\frac{11}{5}w-88-\frac{11}{5}cf-\frac{6}{5}x_3,\\
& x_2=55w-44-55cf-5x_3,\\
& cf, N_0', N_0'', N_1', N_1'', x_1, x_2, x_3\geq 0.
\end{aligned}$$

すべての変数が非負であることから，cf, N_0', N_1', x_1, $x_2\geq 0$ が成り立つ w の範囲，すなわち $w\geq 40$ では，最適解，

$$(cf, N_0', N_0'', N_1', N_1'', x_1, x_2, x_3)=\left(0, \frac{1}{20}w-1, 0, -5w+100, \frac{11}{5}w-88, 0, 0\right)$$

を持ち，そのときの最大値は，

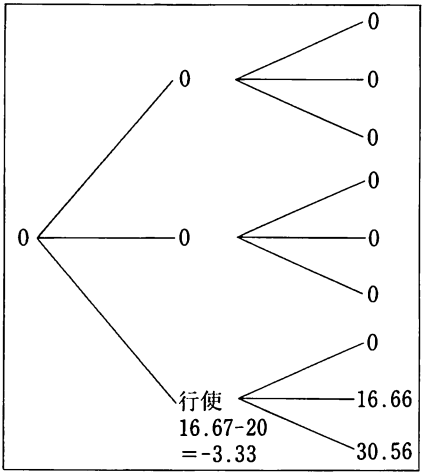
$$V_1(S_1=120, w, 1)=\frac{16}{15}w-\frac{128}{3},$$

で表せる。このように，パラメトリック線形計画法を用いると，各時点の値関数 V_t をパラメータ w の関数の形で表すことが出来る。以下同様にして，すべての時点の値関数を求めると，その結果，時点0で初期資金0で始めたときの価値，

$$V_0(S_0=100,0,0)=5.69,$$

が求められる。投資プロジェクトの最適行使戦略とそこから生まれるキャッシュフロー，最適ポートフォリオ戦略とそこから生まれるキャッシュフローを図5－2～図5－4に示す。

図５－２：投資プロジェクトの最適行使戦略と
そこから生まれるキャッシュフロー



（注）第１期に原材料価格が下降したときに柔軟性を行使する。

図５－３　最適ポートフォリオ戦略

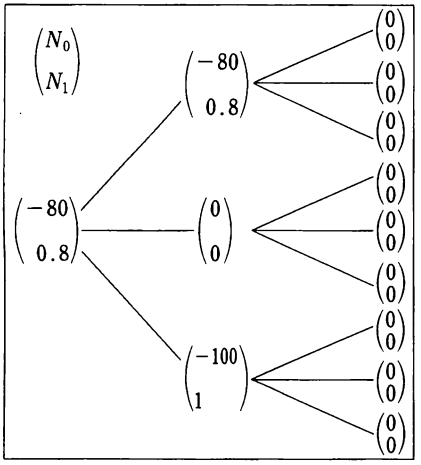
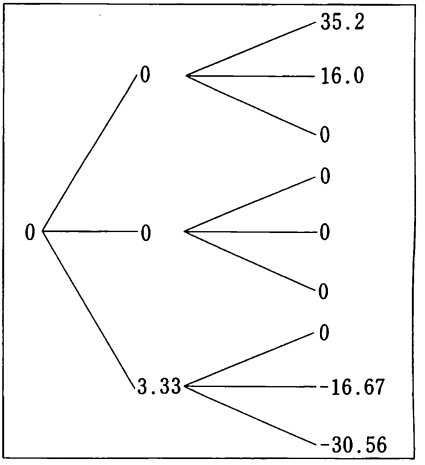


図５－４：最適ポートフォリオ戦略から
生まれるキャッシュフロー



4．結論

本論では，マネジメントの柔軟性を持った実物投資プロジェクトの原資産が市場で売買されているとき，ポートフォリオ戦略を利用することにより，この投資プロジェクトから生まれるキャッシュフローを制御し，企業の効用を最大化する方法を提案した。最初に，原資産市場が完備の場合を想定し，完全ヘッジ戦略によって，投資プロジェクトから生まれるキャッシュフローを完全に相殺し，原資産の価格変動に関わらず投資収益を固定化できることを示した。次に，原資産市場が不完備の場合には，企業の効用関数を想定し，ポートフォリオ戦略を利用した企業の効用最大化問題として定式化した。そして，この問題が動的計画法を利用することによって解けることを示した。また，効用関数としてキャッシュフローの現在価値を利用することにより，この問題が線形計画法として定式化ができることを示し，数値例において実際の解法を示した。

【注】

（1）　本論では，「リアルオプション」をマネジメントがもつ将来の柔軟性を表す言葉として定義し，オプション評価理論による評価とは無関係であるものとする。

（2）　資産評価理論では，効用関数は消費の関数として定義されるが，ここではキャッシュフローの関数として定義した。したがって，消費のときと異なり，キャッシュフローが負になる場合も定義域に含めている。

《参考文献》

〔1〕 Brennan, M.J. and E.S. Schwartz, 1985, "Evaluating Natural Resource Investments," Journal of Business, Vol.58, No.2, pp.135-157.

〔2〕 Dixit, A.K., 1989, "Entry and Exit Decisions under Uncertainty," Journal of Political Economy, Vol.97, No.3, pp. 620-638.

〔3〕 Duffie, D., 1993, Dynamic Asset Pricing Theory, Princeton University Press.

〔4〕 Ekern, S., 1988, "An Option Pricing Approach to Evaluating Petroleum Projects," Energy Economics, pp.91-99.

〔5〕 Harrison, J.M. and S.R. Pliska, 1981, "Martingales and Stochastic Integrals in The Theory of Continuous Trading," Stochastic Processes and their Applications, Vol.11, pp.215-260.

〔6〕 Huang, C. and Litzenberger, 1988, Foundations for Financial Economics, North-Holland.

〔7〕 Ingersoll, Jr., J.E. and S.A. Ross, 1992, "Waiting to Invest: Investment and Uncertainty," Journal of Business, Vol.65, No.1, pp.1-29.

〔8〕 Karatzas, i., J.P. Lehoczky, S.E. Shreve and G. Xu, 1991, "Martingale and Duality Methods for Utility Maximization in An Incomplete Market," SIAM Journal on Control and Optimization, Vol.29, No.3, pp.702-730.

〔9〕 Karoui, N., and M. Quenez, 1995, "Dynamic Programming and Pricing of Contingent Claims in An Incomplete Market," SIAM Journal on Control and Optimization, Vol. 33, No.1, pp. 29-66.

〔10〕 Kulatilaka, N., 1993, "The Value of Flexibility: The Case of A Dual-Fuel Industrial Steam Boiler," Financial Management, Vol.22, No.3, pp.271-280.

〔11〕 Mason, S.P. and R.C. Merton, 1985, "The Role of Contingent Claims Analysis in Corporate Finance", in Recent Advances in Corporate Finance, Homewood, IL, Richard D. Urwin, pp.7-54.

〔12〕 McDonald, R.L. and D.R. Siegel, 1985, "Investment and The Valuation of Firms When There Is An Option to Shut Down," International Economic Review, Vol.26, No.2, pp.331-349.

〔13〕 Merton, R.C., 1971, "Optimum Consumption and Portfolio Rules in A Continuous-Time Model," Journal of Economic Theory , Vol.3, pp.373-413.

〔14〕 Pages, H., 1987, "Optimal Consumption and Portfolio Policies When Markets Are Incomplete", Working Paper #1883-86, Sloan School of Management, Massachusetts Institute of Technology.

〔15〕 Pindyck, R.S., 1988, "Irreversible Investment, Capacity Choice, and

The Value of The Firm," The American Economic Review, Vol.78, No.5, pp.969-985.

〔16〕 Triantis, A.J. and J.E. Hodder, 1990, "Valuing Flexibility as A Complex Option," Journal of Finance,Vol.45, No.2, pp.549-565.