



ID	JJF00095
----	----------

論文名	ポートフォリオ・インシュランスの理論と実証
著者名	金崎芳輔
ページ	111-135

名称	日本経営財務研究学会編『経営財務と情報』中央経済社
発行巻号	経営財務研究双書 9
	Vol. 9
発行年月	1989年7月
	Jul. 1989
発行者	日本経営財務研究学会
	Japan Finance Association
ISBN	4-502-30163-9 C3334

第6章 ポートフォリオ・インシュアランス の理論と実証*

1. はじめに

ポートフォリオ・インシュアランスは、近年、最も注目を集めている運用手法の1つである。アメリカにおいては1986年1年間で、ポートフォリオ・インシュアランスによる運用額は、60億ドルから450億ドルにと、急激な成長を見せている。また、わが国においてもすでに、4大証券会社が、ポートフォリオ・インシュアランス付きの投資信託を売り出して数カ月が経過している。

本稿では、基本的で実用性が高いと考えられるポートフォリオ・インシュアランスの考え方を紹介し、日本の株式市場にこれを適用すると、どのような結果が得られるかを実証する。

ポートフォリオ・インシュアランスとは、株価が上昇した時には、ポートフォリオ価格がそれに応じて上昇し、株価が下落した場合には、ポートフォリオ価値が一定額（フロア）で下げ止まるような運用手法である。ことばを代えると、株価が上昇した場合には、株式運用をしていたような、逆に株価が下落した場合には、安全資産運用をしていたような（株価の影響を受けない）結果が得られる運用手法である。すなわち株式投資と安全資産投資の両方の性格を併せ持っていると言える。ポートフォリオ価値が一定のフロアに下げ止まる性質を捕らえて、株式投資の株価下落のリスク（ダウンサイド・リスク）を失くしたも

のという言い方もよく聞かれる。ポートフォリオ・インシュアランスということばも、株式ポートフォリオのダウンサイド・リスクに対して保険を掛けて、それを被らないようにしている、という意味合いから生まれたものであろう。

ただし、ポートフォリオ・インシュアランスは、株式投資と安全資産投資の良い面の両方を享受しようという欲張りな投資なので、その性格の優れている分、株価が上昇した場合には、収益率でみたパフォーマンスの点で100%株式投資したものより劣り、株価が下落した場合には、100%安全資産投資をしたものに劣る事になる。アメリカで一部に、ポートフォリオ・インシュアランスはコストがかかり過ぎるという批判があるようだが、これは、株価上昇時の株価指数とインシュアランス付きポートフォリオの収益率の結果だけを比較した一面的な見方に過ぎないと考える。ポートフォリオ・インシュアランスの真価が問われるのは、株価が下落した時である。

本稿の構成は以下のとおりである。第2節でポートフォリオ・インシュアランスの基本的な考え方を考察し、第3節で、シュミレーションの内容と結果を報告する。第4節で本稿のまとめと今後の課題について述べる。

2. ポートフォリオ・インシュアランスの基本的な考え方

(1) インシュアド・ポートフォリオ

まず、インシュアランスのかかったポートフォリオを定義しなければならない。理解を容易にするために図を使って説明する。期首に100の資金を持つ投資家を考える。具体的な金額は、50億円でも100億円でも構わないが、とにかく当初の資金を100と指数化して話を進める。この投資家が、100%株式投資をした場合と、100%安全資産投資した場合の2通りを考える。株式投資は、どんな株式ポートフォリオでもよいが、たとえば、東証株価指数と完全に連動するインデックス・ファンドに投資するとする。東証株価指数も期首の値を100と指数化して表わすことになる。

この時、期末の資産価値は、期末の株価によって決定される。それを図で表

わすと、図6-3のようになる。100%株式投資したものの期末の価値は、期末の株価に応じて変動する。株価が20%上昇すれば資産価値も20%増えるし、株価が10%下落すれば、資産価値も10%減少する。すなわち図で、傾きが45°の直線で表わすことができる。次に、100%安全資産投資したものの期末の価値についてみると、これは株価変動の影響を受けない。たとえば、安全利率を年4%とし、期末までの期間を1年とすると、安全資産投資の期末の価値は、株価がどんな値になっても、104となる。すなわち図で、水平な直線で表されることになる。

次に、この図の上で、インシュアランスのかかったポートフォリオ（インシュアド・ポートフォリオと呼ぶ）の期末の価値を表わすと図6-2のようになる。すなわち株価がある一定の値以上になった場合には、株価の上昇に応じて資産価値は増加し、株価が一定の値以下になった場合には、資産価値はきまった額が保証されており、それ以下に下落することはない。この折れ線のような期末の価値を達成するポートフォリオをインシュアド・ポートフォリオと定義する。一定額で下げ止まる下限の資産価値のことをフロアと呼ぶことにする。また株

図6-1 株式投資と安全資産投資の期末の価値

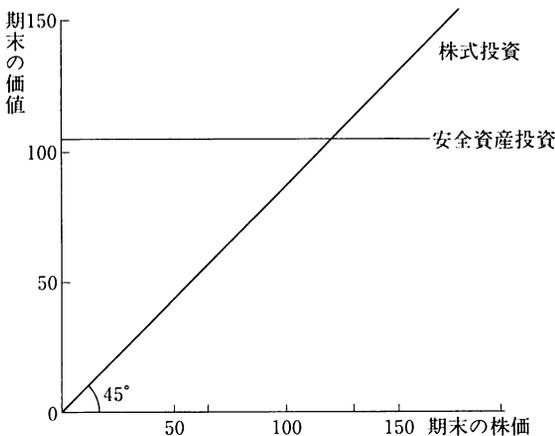
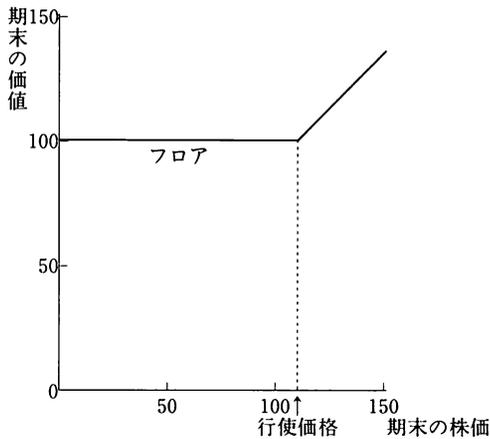


図6-2 インシュアド・ポートフォリオの期末の価値



価がそれ以下に下がってもフロアが保証される株価のことをオプションの用語にしたがって行使価格と呼ぶことにする。

(2) プロテクトティブ・プット

どのような投資をしたら、(1)で定義したインシュアド・ポートフォリオをつくり出せるかについて、ここで紹介する。

結論から先に述べると、株式ポートフォリオを保有し、さらにその株式ポートフォリオの上に書かれたプット・オプションを株式ポートフォリオと同単位保有すれば、インシュアド・ポートフォリオを達成できる。この投資手法はプロテクトティブ・プットと呼ばれている。

オプションについて簡単に説明する。オプションとは、あらかじめ決められた期日(満期)に、あるいは満期までの期間に、有価証券等を、あらかじめ決められた価格(行使価格)で、買う、あるいは売ることのできる権利である。買うことのできる権利をコール・オプションと言い、売ることのできる権利をプ

ット・オプションと言う。またあらかじめ決められた期日だけに権利を行使できるものをヨーロッパ・オプションと言い、期日以前ならいつでも権利を行使できるものをアメリカン・オプションと言う。対象となる有価証券を原株と言う。

満期のコールとプットの価値を図示すると、それぞれ図6-3のようになる。図にしたがって行使価格が100の場合、コール保有者は、満期に株価が105になると、権利を行使して原株を100で買って、それを市場で105で売れるから、5だけ受け取ることができる。すなわち株価が行使価格を上回ったら、権利を行使することで、株価と行使価格の差を受け取れる。逆に株価が行使価格を下回ったら、権利を行使しても損失が出るので、権利は行使しない。この時の受取りは0である。

プットの保有者は、満期に株価が95になると、原株を市場で95で買って、100で売れるから、5だけ受け取ることができる。すなわち満期の株価が行使価格以下なら、権利を行使して、行使価格と株価の差が受取りとなる。株価が行使価格以上なら、権利を行使しない。この時の受取りは0である。

図6-3 コールとプットの期末の価値

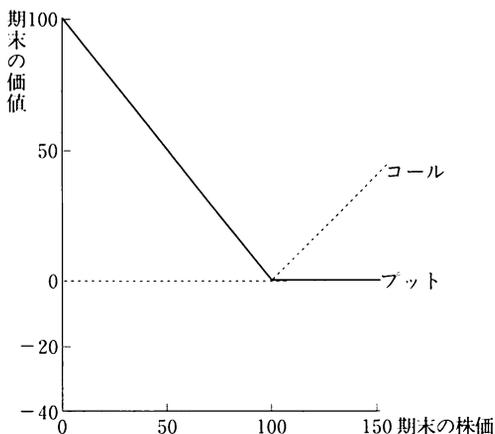
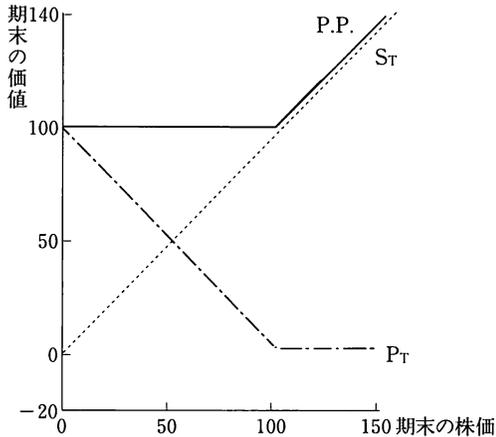


図6-4 プロテティブ・プットの期末の価値



満期時点Tのコールとプットの価値を C_T 、 P_T とすると、 C_T 、 P_T は以下の式で表わされる。

$$C_T = \text{Max} \{ S_T - K, 0 \} \quad (1)$$

$$P_T = \text{Max} \{ K - S_T, 0 \} \quad (2)$$

ただし、 S_T は満期の株価、 K は行使価格である。

次に株式ポートフォリオを1単位、この株式ポートフォリオを原株とするプット1単位、保有した場合を考える。このポートフォリオの期末の価値は、図6-4のようになる。これは S_T の45°線と P_T の折れ線を足し合わせたものである。このように株式とプットを同じ単位保有する投資をプロテティブ・プットと言い、これは、図6-2で示したインシュアド・ポートフォリオの期末のポジションをつくり出すことができる。

ここでプロテティブ・プットを定式化しておこう。まず注意しなければならない点はプロテティブ・プット（以下略してP.P.と書く）に用いるべきプット・オプションは、ヨーロピアン・タイプである、ということだ。ポートフォリ

オ・インシュアランス（以下略してP.I.と書く）で関心があるのは、期末の資産のポジションなので、期中にプットの権利を行使する必要はない。アメリカン・プットは期中でも権利行使可能であるという自由度の高い分だけ、ヨーロッパン・プットよりも高い価格がつき、P.I.に係る費用が高つく。オプションを購入する際の価格を、オプション・プレミアムと言うが、オプション・プレミアムについては、有名なブラック＝ショールズのオプション評価式があり、都合のよいことにヨーロッパン・プットにはこの評価式を適用できる。本稿では、ブラック＝ショールズのオプション評価式を使っていく。したがって株価の動きがしたがう確率過程等、モデルの仮定をそのまま受け入れることにする。次に具体的な定式化をしよう。

投資家の保有する期首の資金額を A とし、これに P.P. をかける。投資家は前もって、投資期間 T (同時に満期を表わす) と、フロアを与える定数 λ を決定しておく。 λ は A の何倍をフロアにするかを示す数字で、たとえば、元本が保証されていけばよいのであれば $\lambda = 1$ である。また、安全資産の連続複利利率 r は外生的に与えられている。フロア率 λ は e^{rT} 以下 ($\lambda < e^{rT}$) でなければならないことは注意しておく必要がある。なぜならば、 $\lambda = e^{rT}$ としたインシュアド・ポートフォリオは、フロアすなわち最悪の場合でも全額安全資産運用した場合と同じだけの収益率を上げており、そのうえ、ある場合には安全資産運用を上回る可能性があることを意味しているが、このような投資機会は、安全資産運用をドミネートしており、存在し得ないからである。株式ポートフォリオの期首の価格を S_0 、期末の価格を S_T とする。また、この株式ポートフォリオを原株として書かれたコール、プットのプレミアム（価格）はそれぞれ C 、 P で示し、時点 0 、 T は右下に添字として付ける。株式ポートフォリオとしてインデックス・ファンドを考えるならば、 S は東証株価指数、日経平均等の株価指数であり、 C や P は株価指数のオプションを想定すればよい。 C_0 、 P_0 はブラック＝ショールズ評価式で以下のように表わされる。

$$C_0 = S_0 N(d_0) - Ke^{-rT} N(d_0 - \sigma\sqrt{T}) \quad (3)$$

$$P_0 = C_0 - S_0 + Ke^{-rT} \quad (4)$$

$$\text{ただし } d_0 = \frac{\ln(S_0 / K) + (r + \sigma^2 / 2) T}{\sigma \sqrt{T}}$$

K : 行使価格

$N(\cdot)$: 標準正規分布の累積密度関数

σ : 株式ポートフォリオの収益率の単位時間当たりの標準偏差

$\ln(\cdot)$: 自然対数関数

e : 自然対数の底

プットの評価式はプット・コール・パリティから導かれる。また、ここでは配当を考慮していない。

さて前に示したとおり、P.P.とは同単位の株式とプットを購入する戦略である。したがって期首において以下の予算制約式を満たさなければならない。

$$m(S_0 + P_0) = A \quad (5)$$

m は購入単位を表わす。(5)式の中で投資家が自由に選択できるのは、 P_0 を決定する K である。 K を動かすとフロアが変化する。したがって、あらかじめ定めたフロアを達成できるような K を求める必要がある。このことを次に示そう。(5)式のポートフォリオ、すなわち株式と行使価格 K のプットを m 単位ずつ保有するものの期末の価値 Y_{AT} は以下のように示される。

$$\begin{aligned} Y_{AT} &= m(S_T + \text{Max}(K - S_T, 0)) \\ &= m \text{Max}(K, S_T) \\ &= \begin{cases} mK & S_T < K \\ mS_T & S_T \geq K \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

フロアとは、 S_T の取る様々な値に対して決まってくる Y_{AT} のうち最小のものであるから(6)式より mK であることがある。したがってフロア達成条件として次の(7)式が設定される。

$$mK = \lambda A \quad (7)$$

(5)式の予算制約式と(7)式のフロア達成条件を連立させて m を消去すると、

$$\lambda(S_0 + P_0) = K \quad (8)$$

となる。(4)式と(8)式から λ というフロア率を達成するための P_0 と K を求めるこ

とができる。こうして得られた P_0 または K から(5)式または(7)式を使って購入単位数 m を求める。

以上で P.P. を実行するのに必要な定式化は全て終わった。投資家は、投資額 A 、投資期間 T 、フロア率 λ を決め安全利子率 r 、ボラティリティ σ 等を調査し、上記の手順に従って K と m を求める。そして期首に、株式ポートフォリオ m 単位、そして行使価格 K のプットを m 単位購入すればよいのである。

最後に P.P. 実行に伴う問題点をいくつか挙げておく。

- ① 今後はどうなるのかわからないが、今のところアメリカの取引所で上場されているオプションはアメリカン・オプションでヨーロッパン・オプションは存在しない。アメリカン・オプションを使うと P.P. にかかるコストが高くなる。
- ② 上場されているオプションは行使価格と満期が標準化されており、特に行使価格については、目標とするフロア設定に対する行使価格に近いオプションが存在しないか、あるいは存在しても木目が粗すぎる可能性がある。
- ③ 主に市場で取引されるオプションは満期まで1カ月ないし3カ月未満の期近物で、P.P. に必要な長期のオプションは購入が困難であるとか、効率的に価格形成されていない等の問題があるかもしれない。

(3) ダイナミック・アセット・アロケーション (DAA)

ブラック＝ショールズはオプションと同じものを原株＋安全資産で作り出し、それとの裁定関係からオプション・プレミアムを求めている。このアイデアを利用すれば、オプションが市場に存在しなくても株式と安全資産を組合せて自家製でオプションをつくり出すことができそうである。前に紹介した P.P. は株式とオプションの保有であるから、これも株式と、株式＋安全資産で合成したオプションの形にでき、株式と安全資産の組合せだけでつくれそうである。

ダイナミック・アセット・アロケーション (DAA) の考え方は以下のようなものである。次のような性質を持つポートフォリオを、上で述べたように株式と安全資産の組合せでつくろうというものである。まず標的となるポートフォ

リオ、ここではP.I.を達成できることがわかっているP.P.ポートフォリオ（これをAポートフォリオと呼ぶ）を定める。標的は時間がたつとランダムに位置を変えていく。つまりAポートフォリオの価値は時間がたつと上がったり、下がったりして変動する。DAAという手法でつくり出すポートフォリオ（Bポートフォリオと呼ぶ）は、まるで飛行機を追跡し続けるミサイルのようなもので、Aポートフォリオの通る経路を忠実に追い続けるのである。こうすると、AポートフォリオとBポートフォリオの価値は常に等しく、当然、期末のポジションも同一になるから、P.I.を達成したことになる。

次にDDAを定式化しよう。まず、AポートフォリオとBポートフォリオの期首の価値（予算）は等しくする。Aポートフォリオの価値 Y_A を変動させる要因は、株価 S の変動だけである。 S が ΔS だけ変化した時に、 Y_A が ΔY_A だけ変化するとする。同時にBポートフォリオの価値は ΔS の変化に対応して ΔY_B だけ変化するが、この変化の大きさ ΔY_B を ΔY_A と常に等しくなるようにしておけば、 Y_A の動きを常に追いつけることが可能である。まず任意の t 時点のAポートフォリオの価値 Y_{At} は、

$$Y_{At} = mS_t + mP_t$$

$$P_t = C_t - S_t + Ke^{-r(T-t)}$$

$$\text{ただし、 } C_t = S_t N(d_t) + Ke^{-r(T-t)} N(d_t - \sigma\sqrt{T-t}) \quad (9)$$

$$d_t = \frac{\ln(S_t/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

である。次に株価の変動に対する Y_{At} の感応度を求める。これは ΔY_A が ΔS の何倍になるかを見るものである。

$$\partial Y_{At} / \partial S_t = mN(d_t) \quad (10)$$

(10)式が得られたので、今度はBポートフォリオに目を向ける。まず期首のBポートフォリオを求めよう。Bポートフォリオは株式ポートフォリオと安全資産（以下キャッシュと書く） B （金額を表わす）の組合せであるから、

$$Y_{B0} = n_0 S_0 + B_0 \quad (11)$$

と表わせる。 n_0 は株式ポートフォリオを購入する単位数である。そしてBポート

フォリオは常に $dY_B = dY_A$ でなければならないから、株価に対する感応度も常に

$$\partial Y_B / \partial S = \partial Y_A / \partial S \tag{12}$$

でなければならない。(11)式より $\partial Y_{B0} / \partial S_0 = n_0$ なので(12)式の条件と(10)式より、

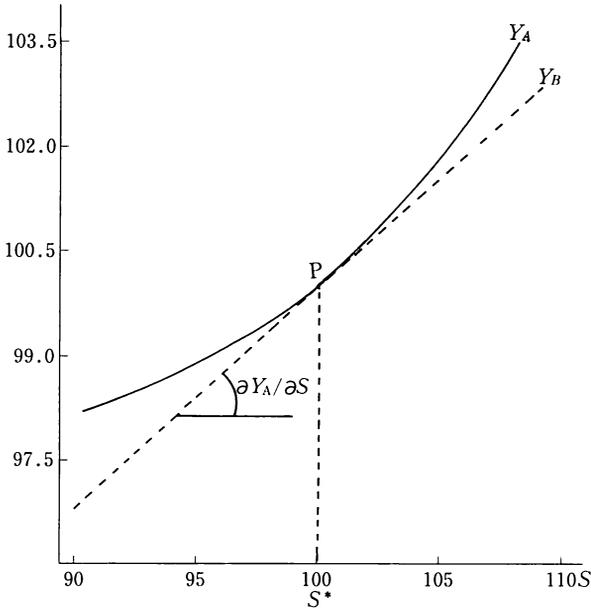
$$n_0 = mN(d_0) \tag{13}$$

となり、また、予算制約 $n_0 S_0 + B_0 = A$ より、

$$B_0 = A - mN(d_0) S_0 \tag{14}$$

となる。これで期首の投資は確定した。すなわち(13)式の n_0 だけ株式ポートフォリオを購入し、残りをキャッシュ・ポジションとするのである。さて、期中においてBポートフォリオは、どう管理運営していけばよいのだろうか。Aポートフォリオのように期首に設定したものをそのまま保有し続けるわけにはいかないようである。(10)式を見ると $\partial Y_A / \partial S$ は時間の変化と S の変化で変わって

図6-5 t時点のAポートフォリオとBポートフォリオの価値



いくことがわかる。常にDAAの条件式(12)が保たれているようにするには、株式購入単位 n の見直しが必要である。すなわち、

$$n_t = mN(d_t) \quad (15)$$

となるように株式購入単位を変えていかなければならない。Bポートフォリオは頻繁に株式とキャッシュの間で資金を移動させることで、Aポートフォリオを正確に追いかけていくことができるのである。この手法は時間を通じてダイナミックに株式とキャッシュの組入れ比率を変えていくのでダイナミック・アセット・アロケーション(DAA)と呼ばれている。

以上の結果を図で説明しよう。図6-5には t 時点のAポートフォリオとBポートフォリオの価値 Y_A , Y_B と株価 S との関係がグラフにして描かれている。現在の株価が S^* だとすると Y_A , Y_B は点 P で表わされる。 S が上がったたり下がったりすると、Aポートフォリオの価値はグラフに沿って増えたり減ったりする。その Y_A のグラフは曲線であるが、 S がほんの少し動く範囲なら点 P における接線で近似できる。 S の変化に対する Y_A の増減はこの直線である程度追いかけることができる。この接線こそがBポートフォリオに他ならない。 Y_A の株価に対する反応度 $\partial Y_A / \partial S$ は点 P における接線の傾きである。また n 単位の株式と B だけのキャッシュを組み入れたポートフォリオの価値 Y は $Y = nS + B$ であるから、グラフ上では傾きが n 、切片が B の直線で表わすことができる。したがって Y_A を近似する接線、すなわち Y_B の構成は、株式をその傾き $\partial Y_A / \partial S$ 単位保有し、切片分だけキャッシュを保有するものとなる。 Y_A のグラフは時間と共にシフトし、また S も変化するので、接線も変化し続ける。したがって、Bポートフォリオの構成も頻繁に変更されることになる。

最後にDAAの問題点を挙げておく。一つは取引費用の問題である。ポートフォリオの組替え頻度を大きくすると、取引費用がかさむが、あまり放置しておくと Y_A と Y_B の乖離が大きくなるというトレード・オフが存在する。また株式ポートフォリオを売買するわけだが多数の銘柄を一斉に売買するのは大変である。以上の問題は先物を使うとある程度軽減することができる。もう一つの問題点は、株価がブラック＝ショールズの仮定した連続的な確率過程に従

っておらず、ジャンプしたりすると、DAAではフォローできないかもしれないということである。次に先物を使ったDAAに目を向ける。

(4) ダイナミック・ヘッジング(先物を使ったDAA)

ダイナミック・ヘッジングの考え方は、(3)のDAAのキャッシュ部分を現物買い、先物売りのいわゆるヘッジで代替しようというものである。ヘッジについて簡単に説明する。今、1単位の株式を購入し、1単位の先物を売ったとする。価格をそれぞれ S_0 、 F_0 とする。証拠金を考えなければ先物契約に資金は不要なので、期首の投資額は S_0 円である。期末には保有している株式を先物契約に従って F_0 円で売ることができる。結局 S_0 円の投資に対して F_0 円の受取りがあり、しかもその受取りは期首に確定するから、これはリスク・フリーな運用である。したがって先物の理論価格は、

$$F_0 = S_0 e^{rT} \quad (16)$$

である。“株式保有+同単位の先物売り”は以上で見たように、安全資産すなわちキャッシュとみなすことができる。

このことを(3)のDAAに適用する。まず、資金A全額を株式ポートフォリオに投資する。

$$a_0 S_0 = A \quad (17)$$

a_0 は株式保有単位でこれは期末まで変更されない。株式とキャッシュの組替えは先物を使って行う。先物の契約数を h (買い契約はプラス、売り契約はマイナスとする)とすると、保有株式数 a_0 のうち先物でヘッジされている $-h$ 単位は、キャッシュとしてみなせる。残りの株式数 $a_0 + h$ がDAAで決まってくる株式数と等しくなければならないから、

$$\begin{aligned} a_0 + h_t &= mN(d_t) \\ h_t &= mN(d_t) - a_0 \end{aligned} \quad (18)$$

となるように先物契約数を調整していけばよい。

ダイナミック・ヘッジングの利点は、先物の取引費用が現物のそれに比較して安いこと、そして株価指数先物を使えば、多数の銘柄の売買という問題も解

決すること等である。問題点は、先物価格が理論価格から乖離するいわゆるベイス・リスクである。たとえば先物をさらに売り建てるときに、理論価格よりも低い価格だったりすると、ヘッジした部分は、安全資産以下の収益率しか生まないことになる。ただ、このリスクは株価指数先物について、アメリカを見ると、それほど懸念する必要はなさそうである。つまり理論価格からの乖離は、それほど大きくない。それからダイナミック・ヘッジングも DAA であることに変わりはないから、第2節でのべた DAA の問題点のいくつかは残ることになる。ただアメリカの現状はこの方法が主流となっている。

3. ポートフォリオ・インシュアランスのシミュレーション

(1) シミュレーションの概要

過去の株価を用いて、その時期にインシュアランス付きのポートフォリオを保有していたならば、その資産価値は、どのように推移し、期末にどのような結果が得られたかをシミュレーションで調べる。プロテクティブ・プットに関しては、現実にもオプションのプレミアムが市場でどう形成されるかという問題は残るものの、オプション契約の性質上、期末の価値は間違いなく図6-2のようなポジションが達成できるので、このシミュレーションの目的は、理論で得られた DAA とダイナミック・ヘッジングがうまく機能するかどうかを確かめることにある。

シミュレーションの具体的な内容は以下のようなものである。対象とする株式ポートフォリオは東証株価指数と完全に連動するものとする。東証株価指数を用いた理由は、1988年にも東証株価指数の指数先物と指数オプションが上場される予定になっており、現実的な実行可能性の観点からこれを用いた。シミュレーション期間は半年とし、満期は3月末と9月末とした。東証株価指数は週次の終値を使った。したがって DAA とダイナミック・ヘッジングは、週に一度のタイミングで、株式とキャッシュの組替え、または先物売建て数の変更を行うことになる。

P.P.を実行するには、プットの価格が必要となるが、これはブラック＝ショールズの評価式(4)式で計算した。この式を使うためには、株式投資収益率のボラティリティ σ と安全利子率 r を求める必要がある。 σ については、1983年9月末～1987年9月末までの4年間、210週分の東証株価指数 (I と書くこととする) より $\ln(I_t/I_{t-1})$ を求め、この標準偏差を使った。 $\sigma = 2.059\%$ (週次) である。 r については、シミュレーションをスタートする時点より前1カ月間のコール・レート無条件物の平均を用いた。

フロア率 λ は1とし、元本割れをしないインシュアランスをかけた。行使価格 K を(8)式で求め、(7)式で株式とプットの購入単位 m を求める。P.P.のかかったAポートフォリオの各 t 時点の価値 $Y_{A,t}$ は $m(S_t + P_t)$ で得られる。ここでP.P.のかかったAポートフォリオの価値の推移を見ることができる。 r は期首の値を変化させなかった。

次にDAAのかかったBポートフォリオのシミュレーションである。これは毎週、株式保有単位 n_t を(5)式に従って計算し、前週の株式保有単位 n_{t-1} との差 $n_t - n_{t-1}$ だけ株式を売買する。差が正の時は、差にその時の株価 S_t をかけた分だけキャッシュ・ポジションから減らされ、株式購入資金となる。逆に差が負の時は、差の絶対値に S_t をかけた分だけキャッシュ・ポジションが増える。したがって、 t 時点のBポートフォリオの価値 $Y_{B,t}$ は以下の式で表わせる。

$$Y_{B,t} = n_t S_t + B_t \quad (19)$$

$$B_t = B_{t-1} e^r + (n_{t-1} - n_t) S_t$$

$$B_0 = Y_{B0} - n_0 S_0$$

B_t は t 時点のキャッシュの金額を表わす。今回のシミュレーションでは、株式の売買に伴う取引手数料と税金を考慮していない。したがってBポートフォリオの価値は、現実には、ここでのシミュレーション結果より株式の売買に伴う手数料分だけ低いはずである。

最後にダイナミック・ヘッジングのシミュレーションであるが、これもDAAと同様に毎週、先物の買建て数 h_t を(18)式に従って求める。このシミュレーションでは、期首に資金の90%を株式に投資し、10%をキャッシュに投資し、

その後株式投資単位は変更しないものとした。根拠は、キャッシュが10%あれば、先物契約に伴う証拠金と値洗いによる現金支出に十分耐えられると判断したからである。シミュレーションでは、 $S_0 = 100$ 、 $A = 100$ として始めるので、株式保有単位 $a_0 = 0.9$ である。したがって $h_t = mN(d_t) - 0.9$ で先物買建て数を求める。ダイナミック・ヘッジングによるポートフォリオをCポートフォリオと呼ぶことにする。Cポートフォリオの t 時点の価値 Y_{Ct} は以下のようにして求められる。

$$Y_{Ct} = 0.9 S_t + B_t \quad (20)$$

$$B_t = B_{t-1} e^r + h_{t-1} (F_t - F_{t-1})$$

$$B_0 = 10$$

Cポートフォリオのキャッシュ部分には、前週のキャッシュに1週間の金利をかけて、それに先物の値洗いによる現金流入出が加えられる。先物の価格は、理論価格 $F_t = S_0 e^{r(\tau-t)}$ を使った。ここでもDAAと同様、先物売買の手数料は考えていない。

(2) シミュレーションの結果

シミュレーションは、1984年3月末～1984年9月末、1986年9月末～1987年3月末、1987年3月末～1987年9月末の3期間をとって行った。この期間をそれぞれⅠ期、Ⅱ期、Ⅲ期とよぶことにする。Ⅰ期は株価が下落した時期、Ⅱ期は株価が著しく上昇した時期、Ⅲ期は中程度の上昇の時期として選んだ。

株価 S は東証株価指数とし、期首を100として標準化した。期首の資金額 A も100として標準化した。ボラティリティー σ はどの期も2.059% (週次) を使い、コール・レート r (年率) はⅠ期が6.4525%、Ⅱ期が4.6307%、Ⅲ期が3.8542%である。フロア率 $\lambda = 1$ として(8)式に基づいて計算した行使価格 K は、Ⅰ期が105.3、Ⅱ期が106.8、Ⅲ期が107.7となった。またP.P.実行の際の株式とプットの購入単位数 m は、Ⅰ期が0.950、Ⅱ期が0.936、Ⅲ期が0.928であった。シミュレーション結果を表6-1、表6-2、表6-3と図6-6、図6-7、図6-8に示す。表にはシミュレーション期間の株価、プット・プレ

ミアム, A(P.P.), B(DAA), C(ダイナミック・ヘッジング)それぞれのポートフォリオの価値, DAAの保有株式数, ダイナミック・ヘッジングの先物契約数が示されている。また図には, 株価と, A, B, C, 各ポートフォリオの価値の推移を上部に, 保有株式数と先物契約数を下部にグラフ化して示してある。保有株式数と先物契約数はスケールをずらすとぴったり重なってしまう。保有株式数のスケールは左に, 先物契約数のスケールは右に表示されている。

図6-6, 図6-7, 図6-8を見ると, Bポートフォリオ, Cポートフォリオは理論どおり, ほぼ正確にAポートフォリオに追随していくことが確かめられる。期末の価値を見ても, B, CポートフォリオはAポートフォリオと比較して, 0.5~1ポイントしか下回っていない。ただし, B, Cポートフォリオは株式または先物の売買手数料がかかり, その分さらに下回るのは注意しておく必要がある。BとCの2つのポートフォリオの動きは, ほとんど重なっていて, 図では区別することがむずかしい。これは先物価格に理論価格を使っていることから当然とも言える。次に各期について見ていく。I期の株価下落時には, 各ポートフォリオともに, 株価に追随して下がることなく, 途中からほぼ安全資産運用の形をしている。これは保有株式数の動きからも明らかである。結果として, 元本割れを防ぐことは可能と見てよいだろう。次にII期の株価上昇時であるが, 各ポートフォリオとも, 株価ほどではないが, 株価上昇にしたがって価値が増加している。DAAとダイナミック・ヘッジングがP.P.と同じ動きをしており, 理論通り機能することが確かめられる。DAAの保有株式数は, 株価上昇にしたがって, 増加している。最後のIII期であるが, やはり, DAAとダイナミック・ヘッジングがP.P.を追いかけていることがわかる。DAAの保有株式数が株価と連動しているようすもわかる。ここで一つDAAの欠点が見られる。それは, 期末近くに株価が行使価格付近にくると, DAAの指示する保有株式数が大きく振れる点である。シミュレーションの結果P.I.は可能であること, またDAAやダイナミック・ヘッジングと言う手法もうまく機能しそうなことがわかった。

表6-1 P.I. ポートフォリオの価値の推移 (I期)

年月日	東証株価指数	プット	$r = 6.4525\%$			$\sigma = 2.059\%$ (週次)			先物契約数
			Aポートフォリオの価値	Bポートフォリオの価値	Cポートフォリオの価値	保有株式数	K=105.3		
840325	100.000	5.286	100.000	100.000	100.000	0.431	-0.469		
840401	97.531	6.761	99.056	99.007	99.047	0.337	-0.563		
840408	99.420	5.607	99.754	99.727	99.735	0.397	-0.503		
840415	97.072	7.094	98.936	98.868	98.914	0.306	-0.594		
840422	98.942	5.894	99.572	99.526	99.542	0.365	-0.535		
840429	100.473	4.987	100.165	100.164	100.159	0.416	-0.484		
840506	97.436	6.893	99.091	98.972	99.008	0.293	-0.607		
840513	92.236	10.972	98.083	97.553	97.669	0.125	-0.775		
840520	91.002	12.195	98.015	97.498	97.639	0.089	-0.811		
840527	89.248	13.909	97.978	97.453	97.629	0.053	-0.847		
840603	91.655	11.764	98.226	97.694	97.829	0.085	-0.815		
840610	88.691	14.645	98.148	97.554	97.739	0.034	-0.866		
840617	89.574	13.900	98.279	97.701	97.874	0.038	-0.862		
840624	91.318	12.338	98.451	97.883	98.032	0.054	-0.846		
840701	90.669	13.053	98.515	97.964	98.123	0.037	-0.863		
840708	88.847	14.937	98.573	98.013	98.197	0.015	-0.885		
840715	87.419	16.469	98.672	98.111	98.314	0.006	-0.894		
840722	87.863	16.151	98.792	98.234	98.434	0.005	-0.895		
840729	92.137	12.050	98.956	98.377	98.535	0.024	-0.876		
840805	92.005	12.290	99.058	98.493	98.653	0.016	-0.884		
840812	93.289	11.141	99.187	98.633	98.785	0.020	-0.880		
840819	93.506	11.038	99.296	98.758	98.909	0.014	-0.886		
840826	93.730	10.933	99.408	98.881	99.032	0.008	-0.892		
840902	92.658	12.123	99.521	98.994	99.150	0.001	-0.899		
840909	94.171	10.740	99.643	99.118	99.270	0.001	-0.899		
840916	93.762	11.277	99.766	99.240	99.394	4.819E-05	-0.900		
840923	94.423	10.746	99.889	99.363	99.516	7.000E-08	-0.900		
840930	95.983	9.317	100.013	99.486	99.639	0.000	-0.900		

図6-6 P.I.ポートフォリオの価値の推移（I期）

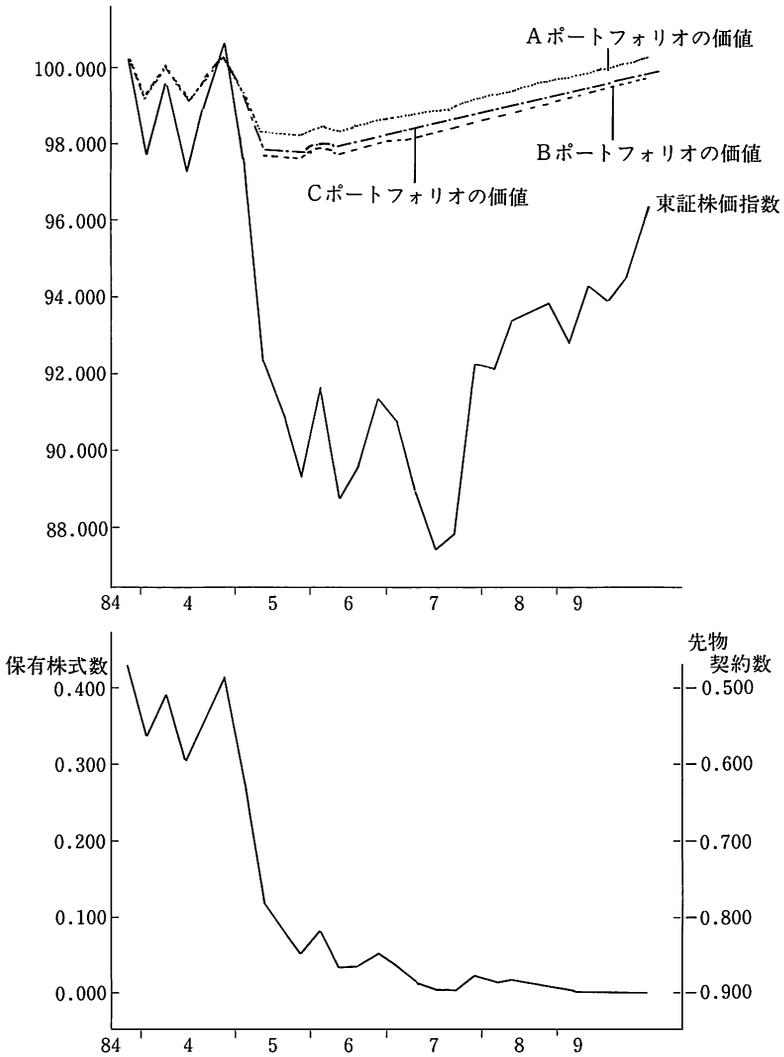


表6-2 P.I.ポートフォリオの価値の推移(Ⅱ期)

K = 106.8

r = 4.6307% $\sigma = 2.059\%$ (週次)

年月日	東証株価指数	プット	Aポートフォリオの価値	Bポートフォリオの価値	Cポートフォリオの価値	保有株式数	先物契約数
860928	100.000	6.806	100.000	100.000	100.000	0.339	-0.561
861005	101.481	5.878	100.517	100.560	100.542	0.383	-0.517
861012	95.884	9.758	98.909	98.470	98.515	0.196	-0.704
861019	91.674	13.370	98.350	97.714	97.822	0.092	-0.808
861026	95.628	10.003	98.899	98.158	98.204	0.174	-0.726
861102	96.146	9.603	99.010	98.320	98.361	0.180	-0.720
861109	97.589	8.476	99.306	98.652	98.675	0.215	-0.685
861116	98.854	7.524	99.599	98.993	99.002	0.248	-0.652
861123	102.855	4.858	100.849	100.050	100.019	0.392	-0.508
861130	105.543	3.398	101.998	101.158	101.106	0.498	-0.402
861207	107.017	2.692	102.717	101.936	101.876	0.556	-0.344
861214	107.055	2.609	102.675	101.995	101.935	0.556	-0.344
861221	106.188	2.909	102.145	101.551	101.495	0.515	-0.385
861228	106.188	2.837	102.077	101.592	101.537	0.511	-0.389
870104	107.967	2.026	102.983	102.544	102.481	0.592	-0.308
870111	111.862	0.859	105.538	104.883	104.810	0.753	-0.147
870118	114.427	0.405	107.514	106.832	106.755	0.834	-0.066
870125	119.968	0.057	112.377	111.462	111.382	0.917	-0.017
870201	116.539	0.143	109.247	108.318	108.238	0.890	-0.010
870208	116.842	0.095	109.485	108.592	108.512	0.902	0.002
870215	119.554	0.018	111.953	111.041	110.961	0.928	0.028
870222	122.345	0.002	114.550	113.631	113.550	0.935	0.035
870301	123.988	1.170E-04	116.087	115.167	115.087	0.936	0.036
870308	125.875	1.140E-06	117.853	116.933	116.852	0.936	0.036
870315	126.952	0.000	118.862	117.940	117.860	0.936	0.036
870322	131.454	0.000	123.077	122.154	122.074	0.936	0.036
870329	132.232	0.000	123.805	122.882	122.802	0.936	0.036

図6-7 P.I.ポートフォリオの価値の推移(II期)

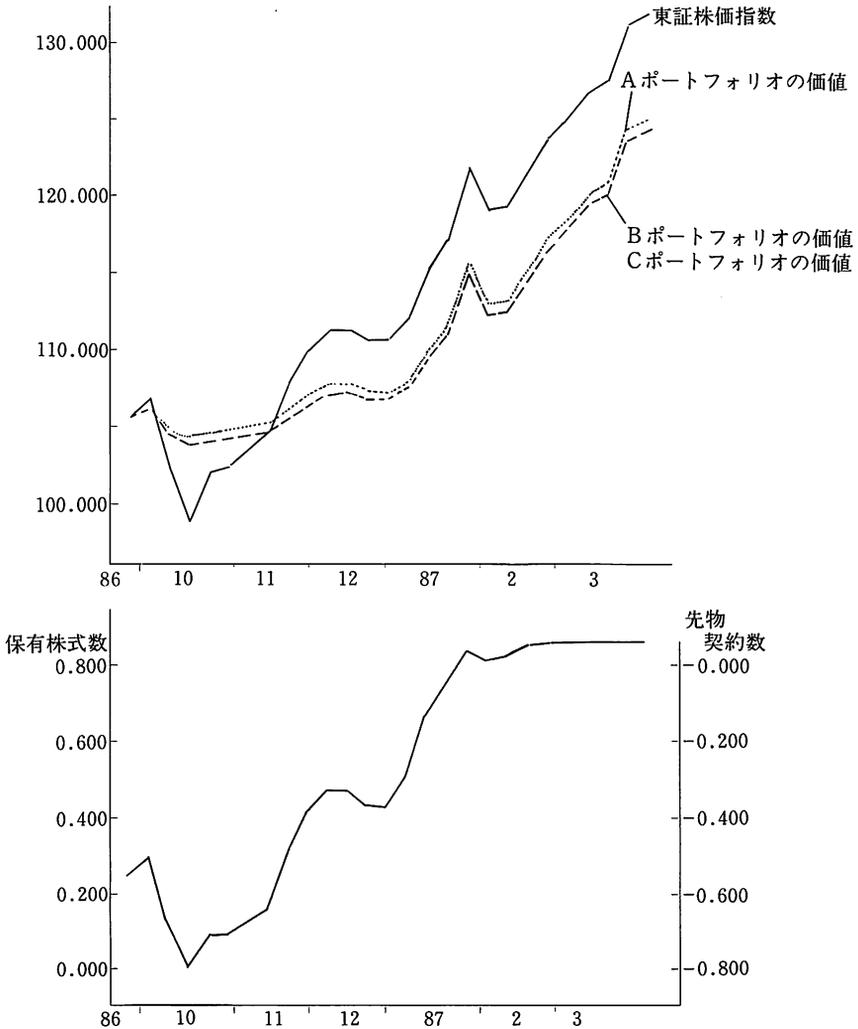
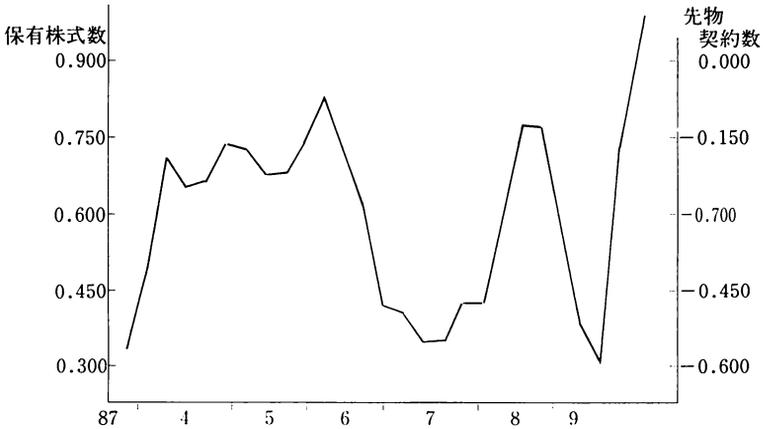
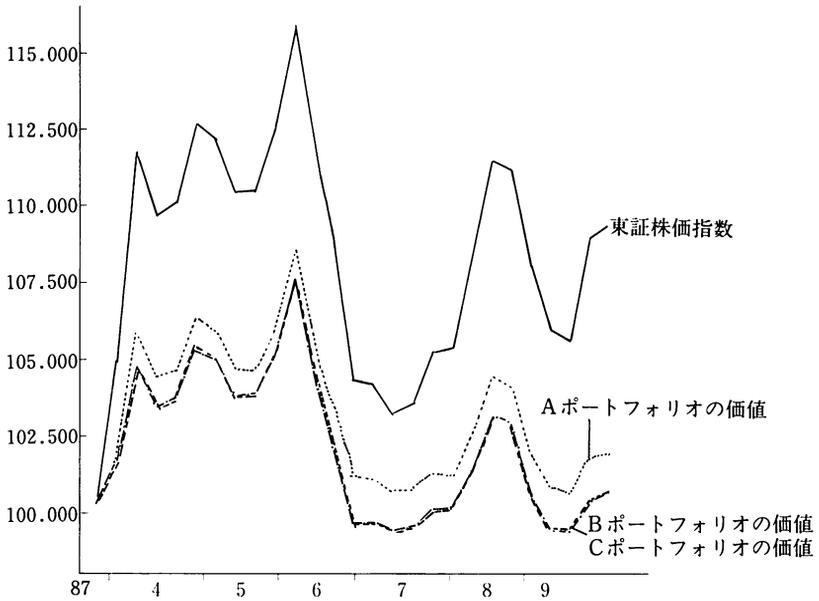


表 6-3 P.I. ポートフォリオの価値の推移 (Ⅲ期)

$r = 3.8542\%$ $\sigma = 2.059\%$ (週次) $K = 107.7$

年月日	東証株価指数	プット	Aポートフォリオ の価値	Bポートフォリオ の価値	Cポートフォリオ の価値	保有株式数	先物契約数
870329	100.000	7.705	100.000	100.000	100.000	0.296	-0.604
870405	104.874	4.762	101.793	101.495	101.440	0.454	-0.446
870412	112.068	1.942	105.855	104.801	104.690	0.680	-0.220
870419	109.850	2.555	104.364	103.314	103.211	0.616	-0.284
870426	110.348	2.333	104.620	103.647	103.542	0.632	-0.268
870503	112.993	1.543	106.342	105.342	105.227	0.710	-0.190
870510	112.420	1.623	105.885	104.954	104.841	0.696	-0.204
870517	110.631	2.059	104.628	103.729	103.621	0.642	-0.258
870524	110.742	1.958	104.638	103.825	103.716	0.647	-0.253
870531	112.803	1.342	105.980	105.182	105.067	0.714	-0.186
870607	116.387	0.646	108.661	107.759	107.637	0.808	-0.092
870614	112.215	1.344	105.435	104.399	104.281	0.702	-0.198
870621	108.938	2.268	103.251	102.117	102.006	0.581	-0.319
870628	104.248	4.481	100.951	99.420	99.323	0.365	-0.535
870705	104.110	4.501	100.841	99.415	99.319	0.349	-0.551
870712	103.024	5.153	100.438	99.082	98.992	0.287	-0.613
870719	103.383	4.846	100.487	99.237	99.145	0.292	-0.608
870726	105.172	3.619	101.009	99.811	99.712	0.374	-0.526
870802	105.336	3.427	100.982	99.917	99.817	0.372	-0.528
870809	108.662	1.663	102.433	101.200	101.092	0.569	-0.331
870816	111.707	0.649	104.318	102.961	102.848	0.742	-0.158
870823	111.358	0.598	103.948	102.717	102.604	0.739	-0.161
870830	108.101	1.433	101.698	100.323	100.212	0.532	-0.368
870906	105.903	2.422	100.576	99.187	99.078	0.323	-0.577
870913	105.500	2.516	100.289	99.105	98.996	0.241	-0.659
870920	109.082	0.343	101.598	100.024	99.913	0.694	-0.206
870927	109.569	0.000	101.731	100.379	100.268	0.928	0.028

図6-8 P.I.ポートフォリオの価値の推移 (Ⅲ期)



4. おわりに

以上、ポートフォリオ・インシュアランスの基本的な考え方と、簡単なシミュレーションを紹介したが、ここでは触れなかった多くの問題が残されている。まずボラティリティの推定の問題、DAAの場合の売買タイミングと取引手数料の問題、株価が1987年の10月20日の暴落のように大きくジャンプした場合にDAAでインシュアできるかといった問題等がある。またブラック＝ショールズのオプション評価式によらないポートフォリオ・インシュアランスの手法も幾つか考案されてきている。海外投資に伴う為替変動まで含めたインシュアランスも一つの応用分野である。これらの点は今後の研究課題としたい。

<参考文献>

- [1] 青山 護「オプション評価理論の展望(その1)」・「オプション評価理論の展望(その2)」『証券アナリストジャーナル』1982年3月, 6月。
- [2] 浅野幸弘「ポートフォリオ・インシュアランス — オプションと先物によるリスク・コントロール —」『証券アナリストジャーナル』1987年6月。
- [3] Black, F., and M. Ssholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, May/June, 1973.
- [4] Copeland, T. E., and J. F. Weston, *Financial Theory and Corporate Policy*, 2nd ed., Addison-Wesley, 1983.
- [5] Cox, J. C., and M. Rubinstein, *Options Markets*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1985.
- [6] 平木多賀人「ポートフォリオ・インシュアランスの理論とその応用」『金融ビジネス』1987年5月。
- [7] 池田昌幸「オプション価格の比較静学」未定稿。
- [8] 日興リサーチセンター「ポートフォリオ・インシュアランス — ダウンサイドに強い保険型戦略 —」『投資月報』1987年9月。
- [9] 大村敬一・清水正俊『株式オプション』金融財政事情研究会, 1987年。
- [10] スティーブ・ロス, 浜尾 泰「ポートフォリオ・インシュアランス — その考え方と大和RRHモデル」『企業会計』1987年5月。

- [11] Rubinstein, M., "Alternative Paths To Portfolio Insurance," *Financial Analysts Journal*, Jul.-Aug. 1985. 訳文「ポートフォリオ・インシュアランスのための選択的経路」『証券アナリストジャーナル』1987年2月。
- [12] Rubinstein, M., and H.E.Leland, "Replicating Options with positions in Stock and Cash," *Financial Analysts Journal*, Jul.-Aug. 1981. 訳文「株式およびキャッシュ・ポジションによるリプリケーション・オプション」『証券アナリストジャーナル』1986年12月。
- [13] 渋谷裕司「ポートフォリオ・インシュアランス」野村総合研究所『財界観測』1987年9月。

(金 崎 芳 輔)

* 本稿におけるデータおよび計算は日経NEEDSを使用させていただきました。
日本経済新聞社に感謝します。