JFA

ID	JJF00011

論文名	条件付請求権の評価
著者名	飯原慶雄
ページ	3-20

名称	日本経営財務研究学会編『企業評価と経営財務』中央経済社
発行巻号	経営財務研究双書 2
	Vol. 2
発行年月	1980年9月
	Sep. 1980
発行者	日本経営財務研究学会
	Japan Finance Association
ISBN	3034-342438-4621

JFA 日本経営財務研究学会

第1章　条件付請求権の評価

1. はじめに

財務資産 (financial asset) のなかには，将来時点での価値がその時点での他の資産の価値あるいは世界の状態に依存するものが多い。たとえば，オプションの満期時の価値は基礎となる株式の満期時の価格によってきまり，転換社債の転換時点での価値はその時の株価によってきまる。また，借入金の返済時の価値はその時の企業の価値に依存する。さらに，特定の状態が生起したときだけ1単位の金額が受払いされる Arrow-Debreu 証券（AD証券）は世界の状態に依存する財務資産である。このように将来時点での価値が他の資産の価値あるいは世界の状態に依存するような資産を条件付請求権 (contingent claims) とよぶが，このような資産の評価問題は最近の財務論の主要課題のひとつとなっている。この論文ではこの条件付請求権の評価について考えるとともに，その応用について検討する。

最近の条件付請求権の評価理論はオプション評価モデル (option pricing model) を中心に展開されてきたといってよいであろう。オプション評価モデルは Black-Scholes のモデル以来，多くの発展がなされ，近年はまた複雑な数学的取扱いをさけてモデルを導出する試みもなされている(1)。そして，財務論のテキストブックにもオプション評価モデルが紹介されるようになってきている(2)。ここ

ではオプション評価モデルの導出を直接の目的とせず，Black-Scholes 型のオプション評価モデルを含むより一般的な条件付請求権の評価モデルとして，無危険利子率が r で，現在から t 時間後の時点で，ある証券の価格が x であるとき $h(x)$ の価値をもつ条件請求権について，その現在の価値が，

$$q = \mathrm{e}^{-rt} \int_0^{\infty} h(x)\, \mathrm{d}\, F_{\tilde{x}}(x) \qquad (1 \cdot 1)$$

となる場合について検討する。ここで $F_{\tilde{x}}(x)$ は平均が e^{rt} で,対数分散が x の対数分散と等しい対数正規分布関数である。(1･1)は危険中立的評価関係 (risk neutral valuation relation; RNVR) とよばれる。

Black-Scholes 型のオプション評価モデルでは，株式の価格変動について幾何ブラウン運動 (geometric Brownian motion) を仮定し，それからモデルを展開しているが，確率過程 $\{x(t)\}$ が幾何ブラウン運動であると $x(t)$ の確率分布は対数正規分布となる。また，(1・1)の形の RNVR は比例危険回避一定 (constant proportional risk aversion; CPRA) と対数正規分布から導くことができる。このように対数正規分布は重要な役割を果すので，対数正規分布とそれに関連してブラウン運動や2変数正規分布の性質についてつぎの節で検討する。これらの性質は，この論文の各所で利用されるが，その他にも財務論のいろいろな分野で使用されている。

RNVRからは Merton 型の連続時間のCAPMや，Black-Scholes 型のオプション評価モデルを導くことができる。また，Breeden-Litzenberger はBlack-Scholes 型のオプション評価モデルを基礎にして，不確実な現金流を評価するために，基本的条件付請求権あるいは状態条件付請求権の価格を求めているが，これらもRNVRから容易に求めることができる。3節ではこれらのことについて説明する。

CAPMでは，証券の期末価格についての予想を基礎に，市場で成立する証券の均衡価格を示すが，期末価格の予想がどのように形成されるかについては何も説明しない。伝統的理論では株式の価値を将来の配当の現在価値として求めている。そこで，いくつかの配当の方式にたいしてRNVRを使って配当の価値を求め，それから株式の価値を求めることを試みた。興味ある結果のひとつと

して，成長型の配当を基礎にしたGordonモデルの確率的配当への拡張が得られた。

2. 予備的考察

(1) ウィナー過程（ブラウン運動）[3]

確率過程$\{z(t)\}$は，それが定常独立増分をもち，$z(t)$の分布が平均零，分散1の標準正規分布であるとき，標準ブラウン運動あるいは標準ウィナー過程であるといわれる。標準ウィナー過程$\{z(t)\}$にたいし，

$$dx = \mu dt + \sigma dz \tag{2・1}$$

によってきまる確率過程$\{x(t)\}$は定常独立増分をもち，$x(0)=0$のときの$x(t)$の分布は平均μt，分散$\sigma^2 t$の正規分布となる。離散的時間のランダム・ウォークで，時間の単位を小さくしていったときの極限として，このような確率過程を得ることができる。

(2) 伊藤の定理[4]

$\{z(t)\}$が標準ウィナー過程で，確率過程$\{x(t)\}$は，

$$dx = f(t)\,dt + g(t)\,dz \tag{2・2}$$

で定義されるものとする。$\{x(t)\}$にたいして，

$$y(t) = F[x(t), t] \tag{2・3}$$

で定義される確率過程$\{y(t)\}$について，

$$dy = F_x\,dx + F_t\,d_t + \frac{1}{2}F_{xx}(dx)^2 \tag{2・4}$$

が成立する。ここで$(dx)^2$は次の表によって計算される。

×	dz	dt
dz	dt	0
dt	0	0

（3）　幾何ブラウン運動

$\{z(t)\}$が標準ウィナー過程であるとき，

$$dx = \alpha x\, dt + \sigma x\, dz \qquad (2\cdot5)$$

に従う確率過程$\{x(t)\}$は幾何ブラウン運動とよばれる。（2・5）は変形すると，

$$\frac{dx}{x} = \alpha\, dt + \sigma\, dz \qquad (2\cdot5')$$

となるが，xを証券の価格と考えるとdx/xは瞬間収益率となるので，以下ではαを瞬間平均収益，σ^2を収益の瞬間分散とよぶことにする。

$$y = F(x,\ t) = \ln x$$

と考えると，（2・4）により，

$$dy = \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{x}\right)^2 = \alpha\, dt + \sigma\, dz - \frac{1}{2}\sigma^2\, dt$$

となる。この式の後半の部分は（2・5′）と$(dx)^2$についての乗法の表から得られる。$y = \ln x$であるから，上の式は，

$$d(\ln x) = (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)\, dt + \sigma\, dz \qquad (2\cdot6)$$

と書くことができる。この式の右辺は，（2・1）の右辺と同じ形をしているので，$\ln x(t)$の分布は，$\ln x(0) = 0$，すなわち$x(0) = 1$であれば，平均$(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t$，分散$\sigma^2 t$の正規分布となる。$x(t)$を時刻0の価格の時刻$t$の価格にたいする比と考えれば，$x(0) = 1$となる。以下では，誤解のおそれがないときには，このような価格比を単に価格とよぶことにする。

（4）　対数正規分布

$\ln x$の分布が平均μ，分散σ^2の正規分布であるとき，xの分布は対数平均μ，対数分散σ^2の対数正規分布となる。このときの密度関数は，

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{\sigma^2}} \qquad (2\cdot7)$$

で，

$$E(\ln x) = \mu, \qquad \mathrm{var}(\ln x) = \sigma^2 \qquad (2\cdot8)$$

である。確率変数の対数の平均と分散を対数平均と対数分散とよび，$\ln x$と$\ln y$の相関係数をxとyの対数相関係数とよぶことにする。yを平均μ，分散σ^2

の正規確率変数，x を対数平均 μ，対数分散 σ^2 の対数正規確率変数とすると，x の確率分布は e^y の確率分布と等しくなるので，x^t の期待値は e^{yt} の期待値と等しくなる。e^{yt} の期待値は正規分布の母関数で，$E(e^{yt})=\exp(\mu t+\sigma^2 t^2/2)$ となることが知られているが，これがまた x^t の期待値でもある。このことから，対数正規分布の平均と分散が，$e^{\mu+\sigma^2/2}$ と $e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)$ になることがわかる。したがって，(2•5)によってきまる幾何ブラウン運動 $\{x(t)\}$ は，$x(0)=1$ であると，$x(t)$ の確率分布は対数平均 $(\alpha-\sigma^2/2)t$，対数分散 $\sigma^2\ t$ の対数正規分布でその平均は $e^{\alpha t}$ となる。

x の分布 $F(x)$ が対数平均 μ，対数分散 σ^2 の対数正規分布であると，$\max\{0, x-a\}$ の期待値は $z=(\ln x-\mu)/\sigma$ という変数変換を行うことにより，

$$\int_a^{\infty}(x-a)\,dF(x)=\int_{(\ln a-\mu)/\sigma}^{\infty}(e^{\mu+\sigma z}-a)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}\,dz$$

$$=e^{\mu+\sigma^2/2}N(\sigma+(\mu-\ln a)/\sigma)-aN((\mu-\ln a)/\sigma) \qquad (2•9)$$

となる。ここで $N(\cdot)$ は標準正規分布の分布関数である。この式はオプション評価モデルを導出するために使用される。

(5)　2変数正規分布の条件付分布[5]

確率変数 x と y の結合分布が，平均 μ_x と μ_y，分散 σ_x^2 と σ_y^2，相関係数 ρ の2変数正規分布であると，x が与えられたときの y の条件付分布は，平均と分散が，

$$\mu_y+(x-\mu_x)\rho\,\sigma_y/\sigma_x \text{ と } \sigma_y^2(1-\rho^2) \qquad (2•10)$$

の正規分布となる。

(6)　2変数対数正規分布

x と y が2変数対数正規分布で，その対数平均，対数分散，対数相関係数が μ_x，μ_y，σ_x^2，σ_y^2，ρ であると，x が与えられたときの y^t の期待値は，2変数正規分布の条件付分布についての結果と，対数正規分布についての性質から，

$$E(y^t|x)=\exp[\mu_y t+(\ln x-\mu_x)t\rho\sigma_y/\sigma_x+\sigma_y^2(1-\rho^2)t^2/2] \tag{2・11}$$

となる。

(7) 条件付期待値

一般に y の期待値は条件付期待値 $E(y|x)$ を使って,

$$E(y)=E[E(y|x)] \tag{2・12}$$

と表すことができる。そこで, $h(x)y^r$ の期待値は,

$$E[h(x)y^r]=E[h(x)E(y^r|x)] \tag{2・13}$$

あるいは,

$$E[h(x)y^r]=E[E[h(x)|y]y^r] \tag{2・14}$$

のいずれで求めることもできる。

3. 条件付請求権の評価

無危険利子率を R, 期首富を w, 証券 j の期首価格を p_j, 期末価格を x_j, 証券 j の購入量を z_j とし, 期末富 W が各種の証券と無危険資産の期末価値によってきまるものとすると,

$$\begin{aligned} W&=\sum_{j=1}^{n} z_j x_j+(w-\sum_{j=1}^{n} z_j p_j)(1+R) \\ &=(1+R)w+\sum_{j=1}^{n}[x_j-(1+R)p_j]z_j \end{aligned} \tag{3・1}$$

となる。期末富の効用関数を $u(\cdot)$とし, その期待効用 $Eu(W)$ を最大にするように証券の購入量を決定するものとすれば, 各個人は,

$$E\{u'(W)[x_j-(1+R)p_j]\}=0 \qquad (j=1,\cdots\cdots,n) \tag{3・2}$$

を満たすように z_j を選択する。 上の式を期首価格について解くと,

$$p=\frac{E[u'(W)x]}{(1+R)E[u'(W)]} \tag{3・3}$$

となる(証券の種類を示す添字は省略した。)。

個人の効用関数として比例危険回避一定　(constant proportional risk aversion; CPRA)　を仮定し，すべての個人の富の限界効用が，

$$u'(w) = w^{r} \qquad (r>0) \tag{3・4}$$

であると仮定すれば，（3・3）は，

$$p = \frac{\mathrm{E}(xW^{r})}{(1+R)\,\mathrm{E}(W^{r})} \tag{3・3′}$$

となる。すべての個人の富の限界効用が（3・4）の形であると，各個人の期末富は市場ポートフォリオの期末価値Yに比例するので，(3･3′)のWをYでおきかえることができるし，さらに，市場ポートフォリオの期末価値と期首価値の比，すなわち，収益率に1を加えたyでおきかえて，

$$p = \frac{\mathrm{E}(xy^{r})}{(1+R)\,\mathrm{E}(y^{r})} \tag{3・3″}$$

と表すこともできる。以下ではyをポートフォリオ収益とよぶことにする。ここまでは無危険利子率をRで表してきたが，1期間の長さを明示的に示すために$1+R$の代りに$(1+R)^{t}$を使用することにし，さらに$(1+R)^{t}=\mathrm{e}^{rt}$，すなわち，

$$r = \ln(1+R) \tag{3・5}$$

を使って，（3・3″）の代りに，

$$p = \mathrm{e}^{-rt}\,\mathrm{E}(xy^{r})/\mathrm{E}(y^{r}) \tag{3・6}$$

を使用することにする。いま，期末の受払額が証券の期末価格xに条件づけられて，$h(x)$という形になる条件付請求権があると，この条件付請求権もまた一種の証券であるから，これにたいしても，（3・6）が成立する。すなわち，この条件付請求権の期首価格をqとすると，

$$q = \mathrm{e}^{-rt}\,\mathrm{E}[h(x)y^{r}]/\mathrm{E}(y^{r}) \tag{3・7}$$

となる。この式が以下の議論の出発点となる。

xとyの結合分布が対数正規分布で，その平均，分散，相関係数が$\mu_x t$, $\mu_y t$, $\sigma_x^2 t$, $\sigma_y^2 t$, ρであると，（3・7）の分母は対数正規分布の性質から，

$$\mathrm{E}(y^{r}) = \exp(r\mu_y t + r^2\sigma_y^2 t/2) \tag{3・8}$$

となる。また，（3・7）の分子の期待値を求めるために x が与えられたときの y^{γ} の条件付期待値を求めると，（2・11）により，

$$E(y^{\gamma}|x) = \exp\{\gamma\mu_y t + \gamma(\ln x - \mu_x t)\rho\sigma_y/\sigma_x + \gamma^2\sigma_y^2 t(1-\rho^2)/2\} \tag{3・9}$$

となる。$F_x(x)$ を x の周辺分布とすると，上の2つの式から，

$$\frac{E(h(x)y^{\gamma})}{E(y^{\gamma})} = \frac{E[E(y^{\gamma}|x)h(x)]}{E(y^{\gamma})}$$

$$= \int_0^{\infty} h(x)\exp\{\gamma(\ln x - \mu_x t)\rho\sigma_y/\sigma_x - \gamma^2\rho^2\sigma_y^2 t/2\}\,dF_x(x)$$

$$= \int_0^{\infty} h(x)\,d F_{\hat{x}}(x)$$

となる。ただし，$F_{\hat{x}}(x)$ は対数平均 $(\mu_x + \gamma\rho\sigma_x\sigma_y)t$，対数分散 $\sigma_x^2 t$ の対数正規分布である。これから，条件付請求権の価格（3・7）は，

$$q = e^{-rt}\int_0^{\infty} h(x)\,d F_{\hat{x}}(x) \tag{3・10}$$

となる。$h(x)$ の代りに x を（3・10）に代入し，x を期首価格と期末価格の比と考えると，x の期首価格は1となるので，（3・10）は，

$$1 = \exp[(-r + \mu_x + \gamma\rho\sigma_x\sigma_y + \sigma_x^2/2)t]$$

すなわち，

$$r = \mu_x + \gamma\rho\sigma_x\sigma_y + \sigma_x^2/2 \tag{3・11}$$

となる。そこで，$F_{\hat{x}}(x)$ の対数平均は，

$$(\mu_x + \gamma\rho\sigma_x\sigma_y)t = (r - \sigma_x^2/2)t \tag{3・12}$$

で，$F_{\hat{x}}(x)$ の平均が e^{rt} であることがわかる。すなわち，$F_{\hat{x}}(x)$ は，x の周辺分布 $F(x)$ を，その平均が e^{rt} となるよう位置パラメータだけを修正した対数正規分布である。（3・10）は，危険中立的評価関係 **(risk neutral valuation relation; RNVR)** とよばれるものであるが[6]，以下ではこれと他のいくつかの評価公式の関係を検討する。

（1）　連続時間CAPM

（3・11）で x の代りにポートフォリオ収益 y を代入すると，μ_x と σ_x が μ_y と

σ_y に変り，ρ は1となるので，

$$r = \mu_y + r\,\sigma_y^2 + \sigma_y^2 / 2$$

となる。これから r を求め，これを(3・11)に代入すれば，

$$\mu_x + \frac{\sigma_x^2}{2} - r = \frac{\rho\,\sigma_x}{\sigma_y}\left(\mu_y + \frac{\sigma_y^2}{2} - r\right)$$

となる。対数平均 μ と瞬間平均 α の間には，$\alpha - \sigma^2 / 2 = \mu$ という関係があるので，x と y の瞬間期待収益を α_x と α_y とすると，上の関係は，

$$\alpha_x - r = \frac{\rho\,\sigma_x}{\sigma_y}(\alpha_y - r) \qquad (3\cdot 13)$$

となる。これは Merton によって求められた連続時間での CAPM[7] である。

(2) オプション評価モデル

オプションの基礎となる株式の現在の株価とオプション満期時の株価の比を x，現在の株価とオプションの権利行使価格の比を a とすると，現在の株価と満期時のコール・オプションの価値の比は，

$$h(x) = \max\{x - a, 0\}$$

となる。満期までの時間が t であると，コール・オプションの現在の価値は(3・10)で，$F_{\hat{x}}(x)$ の対数平均が(3・12)であることと，(2・9)を使うことにより，

$$q = e^{-rt}\int_0^{\infty}(x-a)\,dF_{\hat{x}}(x) = N[\sigma_x\sqrt{t} + ((r - \sigma_x^2/2)t - \ln a)/\sigma_x\sqrt{t}] - a\,e^{-rt}N[((r - \sigma_x^2/2)t - \ln a)/\sigma_x\sqrt{t}]$$

となる。σ_y が表れないので，σ_x の代りに σ を使用し，権利行使価格を E，現在の株価を V とすると，$a = E / V$ であり，オプションの現在の価値 $W(E, t)$ は $q\,V$ となるので，

$$W(E,t) = V\,N\left(\frac{\ln(V/E) + (r - \sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}} + \sigma\sqrt{t}\right) + e^{-rt}E\,N\left(\frac{\ln(V/E) + (r - \sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \qquad (3\cdot 14)$$

となる。これは Black-Scholes のオプション評価モデル[8] である。

（3）　基本条件付請求権 (elementary contingent claims)

時点tである証券の価格がEを上回っているときには1単位の金額の受払いを行い，Eを下回っているときには受払いがない条件付請求権を考えると，

$$h_1(x)=\begin{cases}1 & x \geqq E\\ 0 & x < 0\end{cases} \qquad (3\cdot 15)$$

となる。このような条件付請求権の価格をオプションの価格から求めることを考えてみる。いま，権利行使価格がEのオプションと$E+\varDelta E$のオプションを考え，満期時における両者の価値の差を考えると，xがE以下では差はなく，xが$E+\varDelta E$以上のときには差は$\varDelta E$となる。そこで，（3・15）の形の条件付請求権の価格を$G(E,t)$とすると，

$$G(E,t)=\lim_{\varDelta E\to 0}\frac{W(E,t)-W(E+\varDelta E,t)}{\varDelta E}=-\frac{\partial W(E,t)}{\partial E} \quad (3\cdot 16)$$

となる。$W(E,t)$は満期t，権利行使価格Eのコール・オプションの価格である。コール・オプションの価格として Black-Scholes のモデル（3・14）を使用すれば，（3・16）は，

$$G(E,t)=\mathrm{n}(d_1)V/(E\sigma\sqrt{t})+\mathrm{e}^{-rt}\mathrm{N}(d_2)-\mathrm{e}^{-rt}\mathrm{n}(d_2)/(\sigma\sqrt{t})$$

となる。ここで，

$$d_1=d_2+\sigma\sqrt{t},\ d_2=[\ln(V/E)+(r-\sigma^2/2)t]/(\sigma\sqrt{t}) \quad (3\cdot 17)$$

で，$\mathrm{n}(\cdot)$は標準正規分布の密度関数である。正規分布の密度関数の性質から，

$$\mathrm{n}(d_1)V/E=\mathrm{e}^{-rt}\mathrm{n}(d_2)$$

となるので，このことを考慮すると，

$$G(E,t)=\mathrm{e}^{-rt}\mathrm{N}(d_2) \qquad (3\cdot 18)$$

となる。また，時刻tでの証券の価格がEと$E+\mathrm{d}E$の間にあるときだけ1単位の金額の受払いを行う条件付請求権を考えると，これについては，

$$h_2(x)=\begin{cases}1 & E\leqq x\leqq E+\mathrm{d}E\\ 0 & \text{その他の場合}\end{cases} \qquad (3\cdot 19)$$

となり，この証券の価格を$g(E,t)\,\mathrm{d}E$とすると，

$$g(E,t)=\lim_{\Delta E\to 0}\frac{G(E,t)-G(E+\Delta E,t)}{\Delta E}=-\frac{\partial G(E,t)}{\partial E}$$

となるので，Black-Scholes モデルを使用すれば，

$$g(E,t)=\frac{\partial^2 W(E,t)}{\partial E^2}=\frac{e^{-rt}\ \mathrm{n}(d_2)}{E\sigma\sqrt{t}} \qquad (3\cdot 20)$$

となる。もし，ある証券の価格に条件づけられ，証券の価格が x のときの金額が $h(x)$ となるような現金流 (cash-flow) が存在すれば，その現在価値は，証券の価格が x と $x+dx$ の間にあるときの１単位の金額の現在価値が $g(x,t)\,dx$ であるのであるから，

$$\int_0^\infty h(x)\ g(x,t)\ dx \qquad (3\cdot 21)$$

となると考えられる。これが Breeden-Litzenberger による現金流の評価公式である[(9)]。彼らは連続変数を有限個の離散的点で近似し，

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x,t)\ dt=G(x_1\ t)-G(x_2,t)$$

を計算しておいて，これを使って(３・21)の近似値を求めることを考える。しかし，(３・21)に(３・20)を代入すると，

$$\int_0^\infty h(x)\ g(x,t)\,\mathrm{d}x=e^{-rt}\int_0^\infty h(x)\ \mathrm{d}\ F_{\hat{x}}(x)$$

となり(３・10)の RNVR と同じものになる。実際，上では Breeden-Litzenberger に従って，Black-Scholes モデルから $G(E,t)$ および $g(E,t)$ を求めたが，このようなことを行わなくも，$G(E,t)$ については，

$$h_1(x)=\begin{cases}1 & x\geqq E/V\\ 0 & x<E/V\end{cases}$$

を(３・10)に代入することにより，

$$G(E,t)=e^{-rt}\int_{E/V}^\infty \mathrm{d}F_{\hat{x}}(x)=e^{-rt}\,\mathrm{N}\left(\frac{\ln(V/E)+(r-\sigma_x^2/2)t}{\sigma_x\sqrt{t}}\right)$$

となり，$g(x,t)$ は，(３・19)と対数正規分布の性質から，ただちに，

$$g(E,t)\,\mathrm{d}E = \mathrm{e}^{-rt}\,\mathrm{d}F_{\hat{x}}(E/V)$$

$$= \mathrm{e}^{-rt}\,\mathrm{n}\left(\frac{\ln(V/E)+(r-\sigma_x^2/2)t}{\sigma_x\sqrt{t}}\right)\frac{\mathrm{d}E}{E\sigma_x\sqrt{t}}$$

となる。これらは，(3・18)および(3・20)と同一の形である。

(4)　状態条件付請求権の価格

(3・10)のRNVRは条件付請求権の時刻tでの受払額あるいは現金流がある証券のその時点での価格xの関数$h(x)$として表せるとき，xの確率分布を基礎に$h(x)$の価格を求めようとするものであるが，xの代りに市場ポートフォリオ収益yを使用して$h(x)$を評価したらどのようになるであろうか。いま，市場ポートフォリオの時刻0の価格と時刻tの価格の比がyであるときの$h(x)$の条件付期待値を$H(y)$とする。すなわち，

$$H(y) \equiv \mathrm{E}[h(x) \mid y] \qquad (3\cdot22)$$

とする。yとxの結合分布が2変数対数正規分布であると(3・6)の分子の期待値は条件付期待値についての(2・14)を使用することにより，

$$\mathrm{E}\,[h(x)y^r] = \int_0^\infty H(y)\,y^r\,\mathrm{d}F_y(y)$$

$$= \exp(r\mu_y t + r^2\sigma_y^2 t/2)\int_0^\infty H(y)\,\mathrm{d}F_{\hat{y}}(y)$$

となる。$F_y(y)$は対数平均$\mu_y t$，対数分散$\sigma_y^2 t$の対数正規分布で，$F_{\hat{y}}(y)$は対数平均$(\mu_y + r\sigma_y^2)t$ 対数分散$\sigma_y^2 t$の対数正規分布である。上の式の後半は，$y^r = \mathrm{e}^{r\ln y}$であり，

$$r\ln y - \frac{(\ln y - \mu_y t)^2}{2\sigma_y^2 t}$$

$$= \frac{(\ln y - (\mu_y + \sigma_y^2 r)t)^2}{2\sigma_y^2 t} + r\mu_y t + r^2\sigma_y^2 t/2$$

となることから得られる。上の結果と(3・8)を(3・6)に代入すれば，条件付請求権の価格は，

$$q = e^{-rt}\int_0^\infty H(y)\,dF_{\hat{y}}(y) \qquad (3\cdot 23)$$

となる。$H(y)=y$のときは条件付請求権の価格は1となるので，

$$1 = e^{-rt}\int_0^\infty y\,dF_{\hat{y}}(y) = \exp(-rt+\mu_y t+\gamma\sigma_y^2 t+\sigma_y^2 t/2)$$

すなわち，

$$r = \mu_y + \gamma\sigma_y^2 + \sigma_y^2/2$$

となり，これから，$F_{\hat{y}}(y)$の対数平均は，

$$(\mu_y + \gamma\sigma_y^2)t = (r-\sigma_y^2/2)t$$

で，したがって，平均はe^{rt}であることがわかる。(3・23)は市場ポートフォリオにもとづくRNVRで，$F_{\hat{y}}(y)$は平均がe^{rt}となるようにポートフォリオ収益の分布関数$F_y(y)$の位置パラメータを修正した分布関数である。

これまでの議論の基礎となってきた(3・6)は期末富の期待効用を最大にするように個人が行動するという前提から得られたものであるが，もし，毎期の消費からの期待効用を最大にするように個人が行動するものとし，消費の効用関数が加法的であると仮定すると，時刻0の消費率と時刻tの消費率の比，すなわち消費の成長率に1を加えたものをyの代りに(3・6)に代入した式が得られる。ポートフォリオ収益あるいは消費の成長率で世界の状態を表すことができるものとすると，(3・23)は状態条件付請求権 (state-contingent claims) の価格にもとづく現金流の評価公式であるということができる。

(3・23)を使って現金流の評価を行う場合に必要となる情報は，市場ポートフォリオ収益あるいは消費の成長率の各実現値にたいする現金流の条件付期待値と，市場ポートフォリオ収益あるいは消費の成長率の対数分散(または瞬間分散)と，無危険利子率である。したがって，必要な情報はそれほど多くはない。

4. 株式の評価

RNVRの利用の一例として，株式の評価について考えてみる。

（1）配当と総消費の分布が2変数対数正規分布である場合

配当と総消費の結合分布が2変数対数正規分布で，時刻0の総消費と時刻 t の総消費との比 $c(t)$ の対数平均が $\mu_c t$，対数分散が $\sigma_c^2 t$ で，時刻0の配当と時刻 t の配当の比 $d(t)$ の対数平均が $\mu_d t$，対数分散が $\sigma_d^2 t$ で，$c(t)$ と $d(t)$ の対数相関係数が ρ であると，

$$H(c,t) \equiv \mathrm{E}[d(t) \mid c(t)] = \exp[\mu_d t + (\ln c - \mu_c t)\rho\sigma_d/\sigma_c + \sigma_d^2 t(1-\rho^2)/2] \qquad (4\cdot1)$$

となるので，時刻 t の配当の時刻零の価値を（3・23）を使って評価すると，

$$e^{-rt}\int_0^\infty H(c,t)\,\mathrm{d}F_{\hat{c}}(c) = \exp[\mu_d t + \sigma_d^2 t/2 - rt - (\mu_c t + \sigma_c^2 t/2 - rt)\rho\sigma_d/\sigma_c]$$

となる。総消費と配当の瞬間成長率をそれぞれ α_c と α_d とすると，

$$\alpha_c = \mu_c + \sigma_c^2/2, \qquad \alpha_d = \mu_d + \sigma_d^2/2$$

となるので，これらと危険の市場価格，

$$\lambda = (\alpha_c - r)/\sigma_c$$

を使用すれば，上の式は，

$$\exp[(\alpha_d - r - \lambda\rho\sigma_d)t] \qquad (4\cdot2)$$

となる。ここで，r，α_d，λ，ρ が時間的に一定であると仮定して，時刻0から将来の無限期間にわたる配当の時刻0での価値を求めると，（4・2）を時間に関して積分することにより，

$$\mathrm{P} = \int_0^\infty \exp[(\alpha_d - r - \lambda\rho\sigma_d)t]\,\mathrm{d}t$$

$$= 1/[r - (\alpha_d - r - \lambda\rho\sigma_d)] \qquad (4\cdot3)$$

$$= 1/[(r + \lambda\rho\sigma_d) - \alpha_d] \qquad (4\cdot4)$$

となる。（4・3）は危険修正成長率 $\alpha_d - \lambda\rho\sigma_d$ を使用した Gordon モデルであり，（4・4）は α_d を成長率と考え，危険修正資本コスト $r + \lambda\rho\sigma_d$ を使用した Gordon モデルと考えられる。

(2)　$H(c,t)=a+bc$ の場合

総消費が c であるときの配当の期待値が $a+bc$ であると，(3・23)から時刻 t での配当の時刻0での価値は，

$$e^{-rt}\int_0^{\infty}(a+bc)\,dF_{\hat{c}}(c)=a\,e^{-rt}+b \qquad (4\cdot5)$$

となり，時刻0から時刻 T までこのような関係が成立するものとすれば，時刻0から時刻 T までの配当の時刻0での価値は(4・5)を時間について積分することにより，

$$\int_0^T(a\,e^{-rt}+b)\,\mathrm{d}t=a(1-e^{-rT})/r+bT \qquad (4\cdot6)$$

となる。$b=0$ の場合は c に関係なく平均 a の配当を支払うもので，平均配当額 a に無危険利子率を利率とした年金現価率をかけたものが配当の現在価値となる。他方，$a=0$ の場合は完全に総消費に比例する配当となるので，危険が総消費を基礎にして測定され，無危険利子率も総消費の成長率によってきまるこの型のモデルの特性から，配当の現在価値は bT となる。

(3)　利益モデル

総消費と企業利益の結合分布が2変数対数正規分布で，利益 x が x_0 以上のときには配当は d で，x_0 以下のときは配当は零であるとする。すなわち，利益が x のときの配当を $d(x)$ とすると，

$$d(x)=\begin{cases} d & x\geqq x_0 \\ 0 & x<x_0 \end{cases} \qquad (4\cdot7)$$

であるとする。このような配当政策が予想されるとき，時刻 t の配当の現在価値を(3・10)を使って評価すれば，

$$e^{-rt}\int_0^{\infty}d(x)\ \mathrm{d}\,F_{\hat{x}}(x)=d\,e^{-rt}\int_{x_0}^{\infty}\mathrm{d}\,F_{\hat{x}}(x)$$

$$=d\,e^{-rt}\,\mathrm{N}\left(\frac{-\ln x_0+(r-\sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \qquad (4\cdot8)$$

となる。ここで σ^2 は利益の対数分数（＝瞬間分散）である。このモデルでは，配当が企業利益によってきまるという関係は考慮されているが，配当が社内留保を規制し，社内留保がその後の時点での企業利益に影響を与えていくというプロセスが考慮されていないので，このモデルは不完全なものであるが，短期的な配当の評価としてはこのモデルでも十分であると考えられる。(4・8)は時刻 t での配当の現在価値であるから，ある期間にわたる配当を評価するためには(4・8)を時間について積分する必要があるが，この積分を求めるためには数値計算が必要となる。

5. むすび

財務資産の評価理論として現代財務理論は資本資産評価モデルとオプション評価モデルをつくりだすことに成功した。これらのモデルの導出についてはいろいろな試みがなされ，特に，オプション評価モデルについては確率微分方程式のような複雑な数式を使用しないで，これを導出する試みも始められている[10]。Black-Scholes や Merton は証券価格の動きが幾何ブラウン運動であるという仮定から，それらの証券にたいするオプションの価格についての式(3・14)あるいはそれを一般化したモデルを導いた。他方，Rubinstein は比例危険回避一定型の効用関数と対数正規分布から(3・14)を導いている[11]。さらに，Brennan は Rubinstein 流のアプローチの各条件の必要性と十分性について検討している[12]。ここでは，後者の考え方にしたがって，比例危険回避一定の仮定の下での資本資産評価モデル(3・6)を求め，これに対数正規分布の仮定を加えて，危険中立的評価関係(RNVR)(3・10)あるいは(3・23)を得，これからオプション評価モデル(3・14)を導くというやり方をとった。Constantinides は Merton の連続時間のCAPMや，Black-Scholes のオプション評価モデルが，パラメータを適当に変換することにより，平均値を割引いた危険修正現在価値として求められることに言及しているが[13]。(3・10)あるいは(3・23)はまさにこのことを示している。また Breeden-Litzenberger は不確実な現金流を評価

するために，オプション価格から基本条件付請求権の価格あるいは状態条件付請求権の価格を求め，それから現金流の評価を行うというやり方をとっているが，これは，実は(3・10)あるいは(3・23)による評価と同一であること，また，これに関連したいくつかの式も(3・10)あるいは(3・23)から容易に求めることができることを示した。RNVRの利用の一例として，Gordon モデルの一般化をはじめとするいくつかの配当評価モデルを示したが，このほかにもRNVRが適用できる財務論上の問題は多い。RNVRの特性の解明，RNVRの応用といった点について，今後，さらに研究する必要があるものと思われる。

注(1) Black & Scholes [2], Merton [11], Rubinstein [14], Cox, Ross & Rubinstein [6]. Rendleman & Bartter [13] 参照。

(2) たとえば，Sharpe [15], Haley & Schall [8] など。

(3) ウィナー過程あるいはブラウン運動については Arnold [1], Cox and Miller [7] 参照。

(4) 伊藤の定理については Arnold [1], Merton [9] 参照。

(5) 正規分布の母関数，2変数正規分布，対数正規分布の基本的性質などについては，標準的な統計学のテキストブック，たとえば，Mood, Graybill & Boes [12] などを参照。

(6) RNVR については Brennan [4] 参照。

(7) Merton [10] 参照。

(8) Black & Scholes [2], Merton [11] 参照。

(9) Breeden & Litzenberger [3] 参照。

(10) このような試みについては Sharpe [15], Cox, Ross & Rubinstein [6], Rendleman & Bartter [13] 参照。

(11) Rubinstein [14] 参照。

(12) Brennan [4] 参照。

(13) Constantinides [5] 参照。

＜参考文献＞

〔1〕Arnold, L., *Stochastic differential equations: Theory and Applications*, Wiley, 1974.

〔2〕Black, F. and M. Scholes, The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy* 81, 1973, pp. 637–654.

〔3〕 Breeden, D.T. and R.H. Litzenberger, Prices of state-contingent claims implicit in option prices, *Journal of Business* 51, 1978, pp. 621–651.

〔4〕 Brennan, M.J., The pricing of contingent claims in discrete time models, *Journal of Finance* 34, 1979, pp. 53–68.

〔5〕 Constantinides, Market risk adjustment in project valuation, *Journal of Finance* 33, 1978, pp. 603–616.

〔6〕 Cox, J.C., S.A. Ross and M. Rubinstein, Option pricing: A simplified approach, *Journal of Financial Economics* 7, 1979, pp. 229–263.

〔7〕 Cox. D.R. and H.D. Miller, *The theory of stochastic processes,* Wiley, 1965.

〔8〕 Haley, C.W. and L.D. Schall, *The theory of financial decisions*, 2nd ed., McGraw-Hill, 1979.

〔9〕 Merton, R.C., Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model, *Journal of Economic Theory* 3, 1971, pp. 373–413.

〔10〕 Merton, R.C., An intertemporal capital asset pricing model, *Econometrica* 41, 1973, pp. 867–887.

〔11〕 Merton, R.C., The theory of rational option pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science* 4, 1973, pp. 141–183.

〔12〕 Mood, A.M., F.A. Graybill and D.C. Boes, *Introduction to the theory of statistics*, 3rd ed., McGraw-Hill, 1974.

〔13〕 Rendleman, R.J. and B.J. Bartter, Two-state option pricing, *Journal of Finance* 34, 1979, pp. 1093–1110.

〔14〕 Rubinstein, M., The valuation of uncertain income streams and the pricing of options, *Bell Journal of Economics* 7, 1976, pp. 407–425.

〔15〕 Sharpe, W.F., *Investments,* Prentice-Hall, 1978.

〔付記〕　この研究は南山大学特別研究費Aからの援助を受けた。

（飯　原　慶　雄）